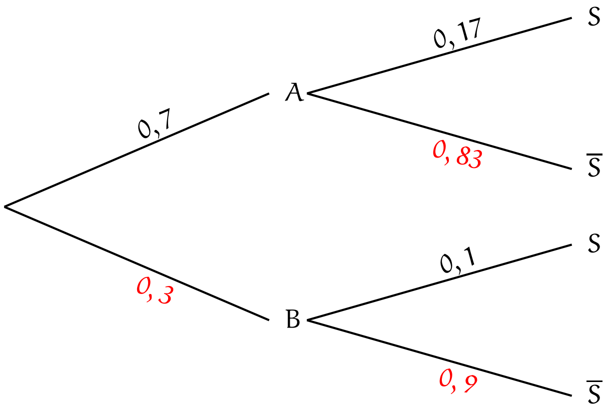
Nouvelle Calédonie. Novembre 2015. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilité.



$p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0,7 \times 0,17 = 0,119$.

$$\boxed{p(A \cap S) = 0,119.}$$

2) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) = 0,119 + 0,3 \times 0,1 = 0,149.$$

3) La probabilité demandée est $p_S(A)$.

$$p_S(A) = \frac{p(A \cap S)}{p(S)} = \frac{0,119}{0,149} = 0,799 \text{ arrondi au millième.}$$

4) Déterminons un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95%. Ici, $n = 1000$. D'autre part, la fréquence observée est $f = \frac{211}{1000} = 0,211$. On note que $n \geqslant 30$ puis que $nf = 211 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 789 \geqslant 5$.
Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,211 - \frac{1}{\sqrt{1000}}, f + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0,179; 0,243]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

Partie B

1) La probabilité demandée est $P(6,4 \leqslant X \leqslant 9,6) = P\left(\mu_X - \sigma_X \leqslant X \leqslant \mu_X + \sigma_X\right)$. La calculatrice (ou le cours) fournit

$$P(6,4 \leqslant X \leqslant 9,6) = 0,683 \text{ arrondi au millième.}$$

2) La calculatrice fournit

$$P(X \leqslant 6,5) = 0,174 \text{ arrondi au millième.}$$

3) D'après la phrase initiale de l'énoncé, dire que l'eau est très peu calcaire équivaut à dire que $Y \leqslant 6,5$. Or,

$$Y \leqslant 6,5 \Leftrightarrow Y - 9 \leqslant -2,5 \Leftrightarrow \frac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\frac{2,5}{\sigma}.$$

La probabilité donnée dans l'énoncé est donc encore $P\left(\frac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\frac{2,5}{\sigma}\right)$ où cette fois-ci la variable $\frac{Y-9}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. La calculatrice fournit

$$P(Y \leqslant 6,5) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(\frac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\frac{2,5}{\sigma}\right) = 0,1 \Leftrightarrow -\frac{2,5}{\sigma} = -1,2815\ldots \Leftrightarrow \sigma = 1,951 \text{ arrondi au millième.}$$

Partie C

1) La fonction $x \mapsto a\cos x$ est continue et positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, l'aire emandée, exprimée en unités d'aire est

$$\mathscr{A}_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x \, dx = [a\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a(1-(-1)) = 2a.$$

2) D'autre part, l'aire du disque est $\mathscr{A}_2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$.

$$\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 \Leftrightarrow \frac{\pi a^2}{4} = 2a - \frac{\pi a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi a^2}{2} = 2a \Leftrightarrow a = \frac{4}{\pi}.$$

De plus, $\frac{4}{\pi} = 1,2\ldots$ et en particulier, $\frac{4}{\pi} < 1,4$. La contrainte est respectée pour $a = \frac{4}{\pi}$.

EXERCICE 2

1) Soit a un réel. La fonction f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'_a(x) = e^{x-a} - 2.$$

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f'_a(x) > 0 &\Leftrightarrow e^{x-a} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 2 \\ &\Leftrightarrow x - a > \ln 2 \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x > a + \ln 2, \end{aligned}$$

et de même, $f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = a + \ln 2$. La fonction f'_a est strictement positive sur $]a + \ln 2, +\infty[$, s'annule en $a + \ln 2$ et est strictement négative sur $]-\infty, a + \ln 2[$. On en déduit que la fonction f_a est strictement décroissante sur $]-\infty, a + \ln 2]$ et est strictement croissante sur $[a + \ln 2, +\infty[$ puis que

la fonction f_a admet un minimum en $a + \ln 2$.

2) Ce minimum est $f_a(a + \ln 2) = e^{a+\ln 2-a} - 2(a + \ln 2) + e^a = e^{\ln 2} - 2a - 2\ln 2 + e^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, posons $g(a) = e^a - 2a + 2 - 2\ln 2$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel a,

$$g'(a) = e^a - 2.$$

La fonction g' est strictement négative sur $]-\infty, \ln 2[$ et strictement positive sur $]\ln 2, +\infty[$. La fonction g admet donc un minimum en $\ln 2$ et ce minimum est égal à

$$g(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 + 2 - 2\ln 2 = 2 + 2 - 4\ln 2 = 4 - 4\ln 2.$$

Le minimum de f_a est minimum quand $a = \ln 2$ et le minimum correspondant est $4 - 4\ln 2$.

EXERCICE 3

Partie A

Prenons $x = y = z = 1$. On a $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \geqslant \dfrac{1}{3}$ mais $x + y + z = 3 \neq 1$. Donc l'implication (P_2).

Partie B

1) a) La droite (BE) est contenue dans le plan (ABE) et le point D n'appartient pas à ce plan. Donc le point D n'appartient pas à la droite (BE) ou encore les points B, D et E ne sont pas alignés. On en déduit que les points B, D et E définissent un unique plan, le plan (BDE).

Les points B, D et E ont pour coordonnées respectives $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Les coordonnées de chacun de ces points vérifient l'équation $x + y + z = 1$. Donc, le plan d'équation $x + y + z = 1$ est le plan (BDE).

b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Donc, le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. D'autre part, le point A a pour coordonnées $(0, 0, 0)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan d'équation $1 \times x + 1 \times y + 1 \times z = 1$ qui est le plan (BDE). Donc la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

c) La droite (AG) est la droite passant par $A(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur directeur $\overrightarrow{AG}(1, 1, 1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (AG) est donc $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Soit $M(t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AG).

$$M \in (BDE) \Leftrightarrow t + t + t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Quand $t = \dfrac{1}{3}$, on obtient les coordonnées du point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) : le point K de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

2) Les longueurs BD, BE et DE sont toutes trois égales à la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 à savoir $\sqrt{2}$. Donc, le triangle BDE est équilatéral.

3) a) Soit M un point du plan (BDE) distinct de M. Le point K est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BDE). Donc le triangle AKM est rectangle en K. D'après le théorème de Pythagore,

$$AM^2 = AK^2 + KM^2.$$

Cette égalité reste vraie quand $M = K$ car alors $AK^2 + KM^2 = AK^2 + 0 = AK^2$.

b) Pour tout point M du plan (BDE), on a $MK^2 \geqslant 0$ puis $AK^2 + MK^2 \geqslant AK^2$ et donc $AM^2 \geqslant AK^2$.

c) Soient x, y et z trois réels tels que $x + y + z = 1$. Soit M le point de l'espace dont les coordonnées sont (x, y, z). D'après la question 1), M est un point du plan (BDE). D'après la question 3)b), $AM^2 \geqslant AK^2$. Or

$$AM^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

D'autre part, d'après la question 1)c)

$$AK^2 = \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Donc, $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$. On a montré que l'implication (P_1) est vraie.

EXERCICE 4.

1) a) Le nombre d'avancés au mois $n+1$ est obtenu de la façon suivante : au nombre d'avancés au mois n, à savoir a_n, on commence par retirer la moitié d'entre eux (qui se désinscrivent du site) puis on ajoute la moitié des débutants au mois n (débutants qui passent au stade avancé) et enfin on ajoute 70 nouveaux inscrits avancés. On obtient

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}d_n + 70 = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70.$$

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \begin{pmatrix} d_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d_n + 100 \\ \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d_n \\ \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} U_n + \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix}$ conviennent.

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, on a $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)$.

- $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I_2 + \frac{1}{2}T = \left(\frac{1}{2}\right)^1 (I_2 + 1T)$.
  L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)$. Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) \times \frac{1}{2}(I_2 + T) \text{ (par hypothèse de récurrence et d'après le cas } n = 1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (I_2 + nT)(I_2 + T) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (I_2 + nT + T + T^2) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(I_2 + (n+1)T + T^2\right). \end{aligned}$$

  Enfin, $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$ et finalement $A^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (I_2 + (n+1)T)$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, on a $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT)$.

3) a) Posons $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} C = AC + B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x + 100 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 70 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = 100 \\ \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x + 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}200 + 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 200 \\ y = 340 \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc, $C = \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix}$.

b) Soit n un entier naturel.

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C = (AU_n + B) - (AC + B) = AU_n - AC = A(U_n - C) = AV_n.$$

c) Soit $n \geqslant 1$. D'après la question 2),

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (I_2 + nT) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ n\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ensuite, $V_0 = U_0 - C = \begin{pmatrix} 300 \\ 450 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix}$ puis

$$V_n = A^n V_0 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ n\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$U_n = V_n + C = \begin{pmatrix} 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200 \\ 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} + 340.$$

4) a) Soit n un entier supérieur ou égal à 4.

$$\begin{aligned} 0 < n^2 \leqslant 2^n &\Rightarrow \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{n^2} \Rightarrow 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100n}{n^2} \\ &\Rightarrow 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}. \end{aligned}$$

b) Pour tout $n \geqslant 4$, $0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{100}{n} = 0$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} 110\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 340$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200\right) = 200$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} d_n = 200 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} a_n = 340.}$$

A long terme, le nombre d'inscrit débutants se stabilisera autour de 200 et le nombre d'inscrit avancés se stabilisera autour de 340.

