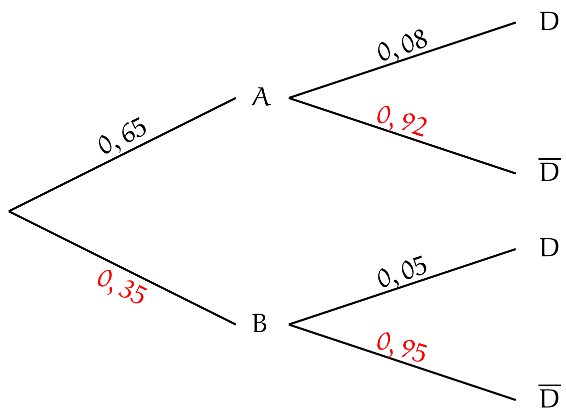
Antilles Guyane. 2016. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) La probabilité demandée est $P\left(\overline{D}\right)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P\left(\overline{D}\right) &= P(A) \times P_A\left(\overline{D}\right) + P(B) \times P_B\left(\overline{D}\right)\\ &= 0,65(1-0,08)+(1-0,65)(1-0,05) = 0,65 \times 0,92 + 0,35 \times 0,95 = 0,598 + 0,3325 = 0,9305.\end{aligned}$$

$$\boxed{P\left(\overline{D}\right) = 0,9305.}$$

c) La probabilité demandée est $P_{\overline{D}}(A)$.

$$P_{\overline{D}}(A) = \frac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{0,65 \times 0,92}{0,9305} = 0,6427 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$\boxed{P_{\overline{D}}(A) = 0,6427 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

2) Notons X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules sans défaut. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,92$ (probabilité qu'une ampoule sortie de la machine A soit sans défaut). En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « l'ampoule est sans défaut » avec une probabilité $p = 0,92$ et « l'ampoule a un défaut » avec une probabilité $1 - p = 0,08$.

La probabilité demandée est $P(X \geqslant 9)$.

$$\begin{aligned}P(X \geqslant 9) &= P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} \times 0,92^9 \times 0,08 + 0,92^{10}\\ &= 0,8121 \text{ arrondi à } 10^{-4}.\end{aligned}$$

Partie B

1) a) Soit $a \geqslant 0$.

$$P(T \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a},$$

puis

$$P(T \geqslant a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}.$$

b) Soient a et t deux réels positifs.

$$\begin{aligned}P_{T\geqslant t}(T\geqslant t+a) &= \frac{P((T\geqslant t+a)\cap(T\geqslant t))}{P(T\geqslant t)} = \frac{P(T\geqslant t+a)}{P(T\geqslant t)}\\ &= \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t-\lambda a+\lambda t}\\ &= e^{-\lambda a} = P(T\geqslant a).\end{aligned}$$

2) a) On sait que $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$ et donc $\lambda = \dfrac{1}{10\ 000} = 0,000\ 1$.

b) $P(T\geqslant 5000) = e^{-0,000\ 1\times 5000} = e^{-0,5} = 0,6065$ arrondi à 10^{-4}.

c) La probabilité demandée est $P_{T\geqslant 7000}(T\geqslant 12\ 000)$.

$$P_{T\geqslant 7000}(T\geqslant 12\ 000) = P_{T\geqslant 7000}(T\geqslant 7000+5000) = P(T\geqslant 5000) = e^{-0,5} = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$\boxed{P_{T\geqslant 7000}(T\geqslant 12\ 000) = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

Partie C

1) Ici, $n = 1000$ et $p = 0,06$. On note que $n\geqslant 30$ puis que $np = 60$ et $n(1-p) = 940$ de sorte que $np\geqslant 5$ et $n(1-p)\geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\begin{aligned}\left[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}};p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] &= \left[0,06-1,96\frac{\sqrt{0,06\times 0,94}}{\sqrt{1000}};0,06+1,96\frac{\sqrt{0,06\times 0,94}}{\sqrt{1000}}\right]\\ &= [0,0452;0,0748].\end{aligned}$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

2) La fréquence d'ampoules défectueuses observée est $f = \dfrac{71}{1000} = 0,071$. La fréquence f appartient à l'intervalle de fluctuation et on ne peut donc remmettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

EXERCICE 2

1) Soit Ω le point d'affixe 2. Soient z un nombre complexe puis M le point du plan d'affixe z.

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow |z-2| = 1 \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = 1 \Leftrightarrow \Omega M = 1.$$

$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre Ω et de rayon 1.

2) Soit a un réel. Soient x un réel puis M le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse x. Les coordonnées du point M sont (x, ax) puis l'affixe du point M est $z_M = x + iax$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow |z_M - 2| = 1 \Leftrightarrow |x + iax - 2| = 1 \Leftrightarrow |(x-2) + iax|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (ax)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + a^2x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(a^2+1\right)x^2 - 4x + 3 = 0 \quad (E). \end{aligned}$$

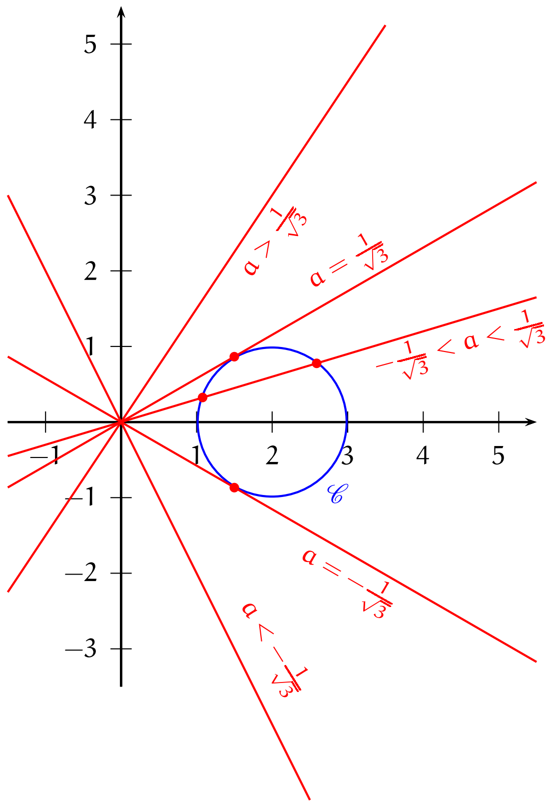
Puisque $a^2 + 1 > 0$, (E) est une équation du second degré. Son discriminant est

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times \left(a^2+1\right) \times 3 = 16 - 12a^2 - 12 = 4 - 12a^2 = -12\left(a^2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= -12\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(a + \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

1er cas. Si $a > \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta < 0$ et donc l'équation (E) n'a pas de solution. Dans ce cas, le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun.

2ème cas. Si $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta = 0$ et donc l'équation (E) a exactement une solution. Dans ce cas, le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ ont exactement un point commun. La droite $\mathscr{D}$ est alors tangente au cercle $\mathscr{C}$.

3ème cas. Si $-\frac{1}{\sqrt{3}} < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta > 0$ et donc l'équation (E) a exactement deux solutions. Dans ce cas, le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ ont exactement deux points communs.



EXERCICE 3

Partie A

1) Soit x un réel non nul.

$$f(x) = xe^{1-x^2} = x \times e \times e^{-x^2} = \frac{x^2}{x} \times e \times \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

Déjà, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{x} = 0$. Ensuite, d'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$. Par passage à l'inverse, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$. En multipliant, on obtient finalement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \times 0 = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

2) a) Pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{1-x^2} + x \times \left((-2x)e^{1-x^2}\right) = e^{1-x^2} - 2x^2e^{1-x^2} = \left(1 - 2x^2\right) e^{1-x^2}.$$

b) Pour tout réel x, $e^{1-x^2} > 0$ et donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-2x^2 = -2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = -2\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré permet alors de dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\sqrt{e/2}$	$\nearrow$	$\sqrt{e/2}$	$\searrow$	0

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}} = 1,16\ldots$ et $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{\frac{e}{2}} = -1,16\ldots$

Partie B

1) Il semble que $\mathscr{C}_g$ soit au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ait un point commun et un seul, à savoir leur point d'abscisse 1.

2) Soit $x \in]-\infty, 0]$. Puisque la fonction exponentielle est strcitement positive sur $\mathbb{R}$, on a $f(x) \leqslant 0$ et $g(x) > 0$. En particulier, $f(x) < g(x)$.

3) a) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant g(x) &\Leftrightarrow xe^{1-x^2} \leqslant e^{1-x} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(xe^{1-x^2}\right) \leqslant \ln\left(e^{1-x}\right) \text{ (car } xe^{1-x^2} > 0 \text{ et } e^{1-x} > 0) \\ &\Leftrightarrow \ln(x) + \ln\left(e^{1-x^2}\right) \leqslant 1 - x \Leftrightarrow \ln(x) + 1 - x^2 \leqslant 1 - x \\ &\Leftrightarrow \ln(x) - x^2 + x \leqslant 0 \Leftrightarrow \Phi(x) \leqslant 0. \end{aligned}$$

b) Pour tout réel $x > 0$,

$$\Phi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = \frac{1 + x(-2x+1)}{x} = \frac{-2x^2 + x + 1}{x}.$$

Pour tout réel $x > 0$, $\Phi'(x)$ est du signe de $-2x^2+x+1$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9$. Le trinôme $-2x^2+x+1$ a deux racines distinctes à savoir $x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{-2 \times 2} = -\frac{1}{2}$ et $x_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{-2 \times 2} = 1$. Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré montre alors que la fonction Φ' est strictement positive sur $]0, 1[$, strictement négative sur $]1, +\infty[$ et s'annule en 1. La fonction Φ est donc strcitement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

c) En particulier, la fonction Φ admet un maximum en 1 et ce maximum est

$$\Phi(1) = \ln(1) - 1^2 + 1 = 0.$$

On en déduit que pour tout réel $x > 0$, $\Phi(x) \leqslant \Phi(1)$ ou encore $\Phi(x) \leqslant 0$.

4) a) D'après la question 3)a), pour tout $x > 0$, on a $f(x) \leqslant g(x)$ et d'après la question 2), pour tout $x \leqslant 0$, on a $f(x) \leqslant g(x)$. Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$ et la conjecture de la question 1) de la partie B est donc valide.

b) D'après le résultat admis par l'énoncé, $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$ ou encore $x = 1$. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont donc un point commun et un seul à savoir le point A de coordonnées $(1, g(1))$ ou encore $(1, 1)$.

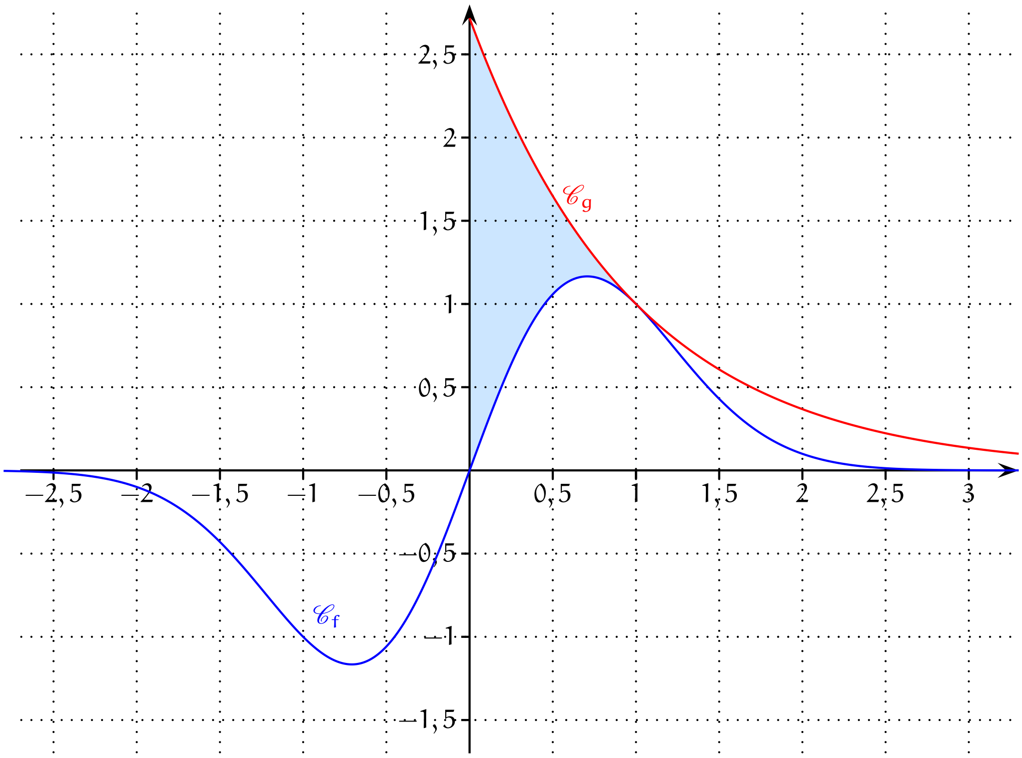
c) On a $x_A = 1$ et $f(x_A) = 1 = g(x_A)$. D'autre part, $f'(x_A) = \left(1 - 2 \times 1^2\right) e^{1-1^2} = -1$ et $g'(x_A) = -e^{1-1} = -1$. Ceci montre déjà que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont le même tangente au point A. Une équation de cette tangente commune est $y = -(x-1) + 1$ ou encore $y = -x + 2$.

Partie C

1) Pour tout réel x, $f(x) = xe^{1-x^2} = -\dfrac{1}{2} \times (-2x)e^{1-x^2} = -\dfrac{1}{2} \times \left(1 - x^2\right)' e^{1-x^2}$ et donc, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par : pour tout réel x, $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{1-x^2}$.

2) $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right) dx = \left[-e^{1-x} + \frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^1 = \left(-e^0 + \frac{1}{2}e^0\right) - \left(-e^1 + \frac{1}{2}e^1\right) = \frac{e-1}{2}.$

3) Pour tout réel x de $[0, 1]$, $f(x) \leqslant g(x)$. Donc, $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right) dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ d'une part, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.



EXERCICE 4

Partie A

1) Algorithme complété

Variables :	X est un nombre entier Y est un nombre entier

Début :	Pour X variant de -5 à 10
	    Pour Y variant de -5 à 10
	        Si $7X - 3Y = 1$
	        Alors afficher X et Y
	        Fin Si
	    Fin Pour
	Fin Pour

Fin :	

2) a) $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$ et donc le couple $(x_0, y_0) = (1, 2)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E).

b) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$7x - 3y = 1 \Leftrightarrow 7x - 3y = 7x_0 - 3y_0 \Leftrightarrow 7(x - x_0) = 3(y - y_0).$$

Donc, si (x, y) est solution de l'équation (E), alors l'entier 3 divise l'entier $7(x - x_0)$. Puisque 3 et 7 sont premiers entre eux, le théorème de GAUSS permet d'affirmer que l'entier 3 divise l'entier $x - x_0$. Donc, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 3k$ ou encore tel que $x = x_0 + 3k$. De même, il existe un entier relatif k' tel que $y - y_0 = 7k'$ ou encore tel que $y = y_0 + 7k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 3k$ et $y = y_0 + 7k'$.

$$7x - 3y = 1 \Leftrightarrow 7(x_0 + 3k) - 3(y_0 + 7k') = 1 \Leftrightarrow 7x_0 - 3y_0 + 21(k - k') = 1 \Leftrightarrow 21(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme $(1 + 3k, 2 + 7k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Soient k un entier relatif puis $x = 1 + 3k$ et $y = 2 + 7k$.

$$-5 \leqslant x \leqslant 10 \Leftrightarrow -5 \leqslant 1 + 3k \leqslant 10 \Leftrightarrow -2 \leqslant k \leqslant 3$$

et

$$-5 \leqslant y \leqslant 10 \Leftrightarrow -5 \leqslant 2 + 7k \leqslant 10 \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant \frac{8}{7} \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 1.$$

Finalement,

$$-5 \leqslant x \leqslant 10 \text{ et } -5 \leqslant y \leqslant 10 \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 1.$$

$k = -1$ fournit le couple $(-2, -5)$, $k = 0$ fournit le couple $(1, 2)$ et $k = 1$ fournit le couple $(4, 9)$.

Il y a exactement trois couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$ à savoir les couples $(-2, -5)$, $(1, 2)$ et $(4, 9)$.

Partie B

1) a) Soit n un entier naturel.

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = -\dfrac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{35}{2}x_n + 8y_n \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{13}{2} & 3 \\ -\dfrac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow X_{n+1} = MX_n.$$

b) On sait alors que pour tout entier naturel n, $X_n = M^n X_0$.

2) a)

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{13}{2} & 3 \\ -\dfrac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-91+105}{2} & 21-24 \\ \dfrac{65-70}{2} & -15+16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -\dfrac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14+15 & -21+21 \\ 5-5 & \dfrac{15-14}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc, $P^{-1}MP = D$ où D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) On sait que pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} \end{pmatrix}$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.

- $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times I_2 \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I_2 = M^0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $M^n = PD^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.

3) Soit n un entier naturel.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = X_n = M^nX_0 = \begin{pmatrix} -14+\dfrac{15}{2^n} & 6-\dfrac{6}{2^n} \\ -35+\dfrac{35}{2^n} & 15-\dfrac{14}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\dfrac{3}{2^n} \\ -5+\dfrac{7}{2^n} \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n, $x_n = -2 + \dfrac{3}{2^n}$ et $y_n = -5 + \dfrac{7}{2^n}$.

4) Soit n un entier naturel.

$$7x_n - 3y_n = 7\left(-2+\frac{3}{2^n}\right) - 3\left(-5+\frac{7}{2^n}\right) = -14 + \frac{21}{2^n} + 15 - \frac{21}{2^n} = 1.$$

Donc, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathscr{D}$.

