BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.

On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$. De plus, une observation statistique a montré que 2 % des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 g, ce qui se traduit dans le modèle considéré par : $P(X \leqslant 170) = 0,02$.

Question 1 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'évènement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 grammes » ?

Réponse a : 0,04 **Réponse b** : 0,96
Réponse c : 0,98 **Réponse d** : On ne peut pas répondre car il manque des données.

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible.
Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B.
Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à $0,05$.

Question 2 : Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

Réponse a : 0,72 **Réponse b** : 0,28
Réponse c : 0,54 **Réponse d** : On ne peut pas répondre car il manque des données

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à $0,02$.
Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

Question 3 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

Réponse a : 0,02 **Réponse b** : 0,67
Réponse c : 0,44 **Réponse d** : 0,01

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

Question 4 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

Réponse a : 0,45 **Réponse b** : 1
Réponse c : 0,55 **Réponse d** : On ne peut pas répondre car il manque des données

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à $0,05$. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5 : Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

Réponse a : 40 **Réponse b** : 400
Réponse c : 1600 **Réponse d** : 20

EXERCICE 2 (4 points)

(commun à tous les candidats)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.
Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1) Vérifier que le point $A(2 \ ; \ 3 \ ; \ 0)$ appartient à la droite d_1.

2) Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

3) Vérifier que le vecteur $\vec{v}(1 \ ; \ -2 \ ; \ -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4) Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$.
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b) Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3 \ ; \ 3 \ ; \ 5)$.

5) On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}(1 \ ; \ -2 \ ; \ -3)$, et passant par le point $B(3 \ ; \ 3 \ ; \ 5)$.

a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

EXERCICE 3 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.
Le modèle mathématique est : $f(t) = 20e^{-0,1t}$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\ \mu$g.L^{-1}.

1) La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.

2) On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}.
Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

3) En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en μg.L^{-1}, le nombre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\ dt$.
Vérifier que pour ce modèle, l' ASC est égal à $200\ \mu$g.L^{-1}.h.

Partie B : administration par voie orale

On note g(t) la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est : $g(t) = 20\left(e^{-0,1t} - e^{-t}\right)$, avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0\mu$g.L^{-1}.

1) Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$g'(t) = 20e^{-t}\left(1 - 0,1e^{0,9t}\right).$$

2) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)
En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale.
On donnera le résultat à la minute près.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de $20\ \mu$g.L^{-1}.

On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.
On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20μg.L^{-1}, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

2) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

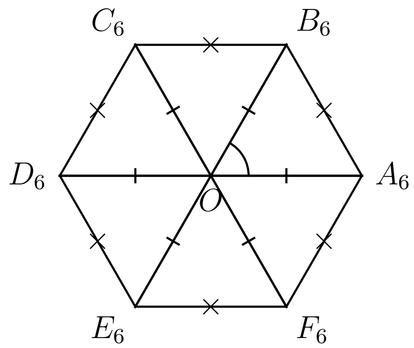
3) On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L^{-1}.
Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.
On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$



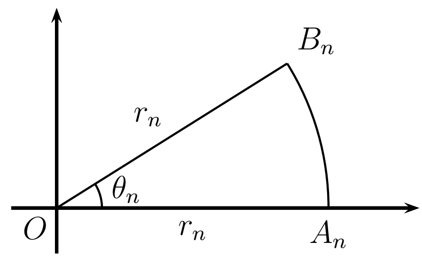
On a représenté ci-contre un polygone P_6.

1) Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.

2) Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6.

3) En déduire que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$



Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.
On note alors $r_n e^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

1) Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B$_n$ dans le triangle OA$_n$B$_n$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.

2) On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.
Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA_n},\ \overrightarrow{OB_n}\right)$, puis démontrer que :

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geqslant 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par :

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi} f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.

1) Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a : $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.

2) En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L, et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3) On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?