Nouvelle Calédonie. Novembre 2017.
Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) La probabilité demandée est $\dfrac{14-12}{15-12} = \dfrac{2}{3}$.

2) La durée moyenne du trajet, exprimée en minutes, est $\dfrac{12+15}{2} = 13,5$.

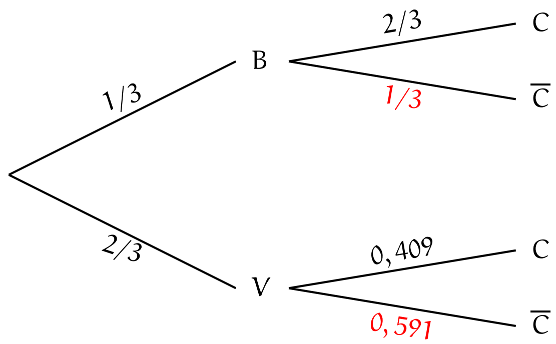
Partie B

1) La probabilité demandée est $P(T_V \leqslant 14)$ ou encore $P(T_V \leqslant \mu)$. On sait que cette probabilité est égale à $0,5$.

2) La probabilité demandée est $P(12 \leqslant T_V \leqslant 14)$. La calculatrice fournit $P(12 \leqslant T_V \leqslant 14) = 0,409$ arrondi à 10^{-3}.

Partie C

1) Sonia prend le bus si et seulement si elle obtient 1 ou 2 en lançant le dé. Donc, $P(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ puis $P(V) = 1 - P(B) = \dfrac{2}{3}$. Représentons alors la situation par un arbre de probabilités. D'après les question A.1) et B.2),



La probabilité demandée est $P(C)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(C) = P(B) \times P_B(C) + P(V) \times P_V(C) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times 0,409 = 0,49 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

2) La probabilité demandée est $P_C(B)$.

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B) \times P_B(C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{0,49} = 0,11 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

EXERCICE 2

1) Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} \times (\ln x)^2$. $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x)^2 = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. On en déduit que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de f.

2) a) Soit x un réel strictement positif. $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2} \ln x$ et donc $\ln x = 2\ln\left(\sqrt{x}\right)$ puis

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(\ln x)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

b) D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4 \times 0^2 = 0$. On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

3) a) Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \times x - (\ln x)^2 \times 1}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}.$$

b) Pour tout réel $x > 0$, $x^2 > 0$ et donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln x(2 - \ln x)$. Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$,

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (et aussi $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$),
- $2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow x < e^2$ (et aussi $2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^2$ et $\ln x < 0 \Leftrightarrow x > e^2$).

On peut alors représenter le signe de la fonction f' dans un tableau de signes :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2 - \ln x$	||	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $f(1) = \dfrac{(\ln 1)^2}{1} = 0$ et $f\left(e^2\right) = \dfrac{\left(\ln\left(e^2\right)\right)^2}{e^2} = \dfrac{2^2}{e^2} = \dfrac{4}{e^2}$.

4) Sur $[1, +\infty[$, f admet un maximum égal à $\dfrac{4}{e^2}$. Mais $e > 2$ et donc $\dfrac{4}{e^2} < 1$. Ainsi, pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $f(x) \leqslant \dfrac{4}{e^2} < 1$. En particulier, l'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solution dans $[1, +\infty[$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0, 1]$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[f(1), \lim\limits_{x \to 0} f(x)\right[= [0, +\infty[$ (d'après la question 1), l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0, 1]$. En particulier, puisque le réel 1 appartient à $[0, +\infty[$, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule, notée α, dans $]0, 1]$.

Finalement, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule, notée α, dans $]0, +\infty[$.

EXERCICE 3

Partie A

Puisque la fonction f est positive sur $[0, \ln 2]$, l'aire demandée est $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\ dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} f(x)\ dx &= \int_0^{\ln 2} \left(2e^x - e^{2x}\right)\ dx \\
&= \left[2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \left(2e^{\ln 2} - \frac{1}{2}e^{2\ln 2}\right) - \left(2e^0 - \frac{1}{2}e^0\right) = \left(2e^{\ln 2} - \frac{1}{2}\left(e^{\ln 2}\right)^2\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2^2\right) - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

La proposition A est donc fausse.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. L'abscisse du point S_n est solution de l'équation $f_n'(x) = 0$. Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
f_n'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2ne^x - 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2e^x\left(n - e^x\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow n - e^x = 0 \text{ (car } 2e^x \neq 0) \\
&\Leftrightarrow e^x = n \Leftrightarrow x = \ln n.
\end{aligned}$$

L'ordonnée y_n du point S_n est alors

$$y_n = f(\ln n) = 2ne^{\ln n} - e^{2\ln n} = 2 \times n - \left(e^{\ln n}\right)^2 = 2n^2 - n^2 = n^2.$$

La proposition B est donc vraie.

EXERCICE 4.

1) a) Soit n un entier naturel. $z_n \neq 0$ puis

$$\begin{aligned}\frac{z_{n+4}}{z_n} &= \frac{(1+i)/(1-i)^{n+4}}{(1+i)/(1-i)^n} = \frac{1+i}{(1+i)^{n+4}} \times \frac{(1+i)^n}{1-i} = \frac{1}{(1+i)^4} \\ &= \frac{1}{((1+i)^2)} = \frac{1}{(1+2i-1)^2} = \frac{1}{(2i)^2} \\ &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n} = -\dfrac{1}{4}$ et en particulier $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}$ est un réel.

b) Soit n un entier naturel. D'après la question précédente, $z_{n+4} = -\dfrac{1}{4}z_n$. Cette dernière égalité fournit l'égalité $\overrightarrow{OA_{n+4}} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA_n}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OA_n}$ et $\overrightarrow{OA_{n+4}}$ sont colinéaires ou encore les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

2) (On rappelle que pour tout entier naturel n, $z_n \neq 0$). Un argument de $1+i$ est $\dfrac{\pi}{4}$ et un argument de $1-i$ est $-\dfrac{\pi}{4}$.

Donc, pour tout entier naturel n, un argument de z_n est $\dfrac{\pi}{4} - n\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = (n+1)\dfrac{\pi}{4}$. Soit alors n un entier naturel.

$$\begin{aligned} z_n \text{ réel} &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z}/ \arg(z_n) = k\pi \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z}/ (n+1)\frac{\pi}{4} = k\pi \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z}/ n+1 = 4k \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z}/ n = 4k-1 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{N}^*/ n = 4k-1 \text{ (car } n \text{ est un entier naturel).}\end{aligned}$$

Finalement, z_n est réel si et seulement si n est un entier naturel de la forme $4k-1$ où k est un entier naturel non nul.

EXERCICE 5.

Partie A :

1) Dans la case B4, il faut copier la formule $= \frac{5}{4} * \text{B3} - \frac{1}{4} * \text{B2}$ puis recopier cette formule vers le bas.

2) Tableau complété. (Les valeurs sont arrondies à 10^{-4}).

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	6,75
5	3	6,9375
6	4	6,9844
7	5	6,9961

3) Il semble que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente, de limite 7.

Partie B : étude de la suite

1) a) Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = v_n.$$

Donc, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contante.

b) On en déduit que pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 6 - \frac{3}{4} = \frac{21}{4}$ et donc que $u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{21}{4}$ ou enfin que $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n $u_n < u_{n+1} < 7$.

- Puisque $u_0 = 3$ et $u_1 = 6$, on a $u_0 < u_1 < 7$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n < u_{n+1} < 7$. Alors $\frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} < \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{21}{4} < \frac{1}{4} \times 7 + \frac{21}{4}$ ou encore, $u_{n+1} < u_{n+2} < 7$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n $u_n < u_{n+1} < 7$.

b) Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 7). La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 = \frac{1}{4}u_n - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}(u_n - 7) = \frac{1}{4}w_n.$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $w_0 = u_0 - 7 = -4$ et de raion $q = \frac{1}{4}$.

b) On sait alors que pour tout entier naturel n,

$$w_n = w_0 \times q^n = -4\left(\frac{1}{4}\right)^n = -\frac{1}{4^{n-1}}$$

puis

$$u_n = w_n + 7 = 7 - \frac{1}{4^{n-1}}.$$

c) Puisque $4 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^{n-1} = +\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 7 - 0 = 7$.

