Polynésie 2017. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A - Durée d'attente

1) a) On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$. Ici, $\lambda = 0,6$ et donc $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,6} = \dfrac{5}{3} = 1,667$ min arrondi à 10^{-3}. Le temps d'attente moyen est de $1,667$ minute arrondi à 10^{-3}.

b)

$$\begin{aligned}P\left(D_1 \leqslant 5\right) &= \int_0^5 \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^5 = \left(-e^{-5\lambda}\right) - \left(-e^{0}\right) = 1 - e^{-5\times 0,6}\\ &= 1 - e^{-3} = 0,950 \text{ arrondi à } 10^{-3}\end{aligned}$$

2) a) Pour tout réel positif t, $P\left(D_2 \leqslant t\right) = 1 - e^{-\lambda t}$. Donc

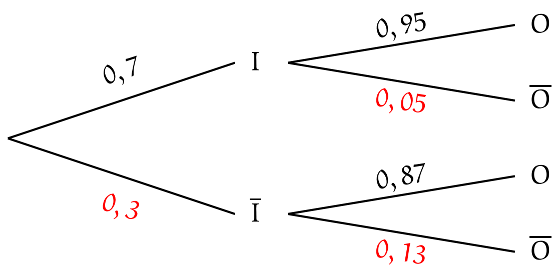
$$\begin{aligned}P\left(D_2 \leqslant 4\right) = 0,798 &\Leftrightarrow 1 - e^{-4\lambda} = 0,798 \Leftrightarrow e^{-4\lambda} = 1 - 0,798 \Leftrightarrow -4\lambda = \ln(0,202)\\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}\ln(0,202).\end{aligned}$$

Donc, $\lambda = 0,4$ arrondi à 10^{-3}.

b) $P\left(D_2 \geqslant 5\right) = 1 - \left(1 - e^{-0,4\times 5}\right) = e^{-2} = 0,135\ldots$ Il y a donc environ 13% des clients mobiles qui attendent au moins 5 minutes avant de joindre l'opérateur et donc pas moins de 10%.

Partie B - Obtention d'un opérateur

1) On note O l'événement « le client obtient un opérateur » et I l'événement « le client est un client Internet ». Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(O)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(O) = P(I) \times P_I(O) + P\left(\overline{I}\right) \times P_{\overline{I}}(O) = 0,7 \times 0,95 + (1 - 0,7) \times 0,87 = 0,926.$$

2) Calculons $P_{\overline{O}}(I)$ (et $P_{\overline{O}}\left(\overline{I}\right) = 1 - P_{\overline{O}}(I)$).

$$P_{\overline{O}}(I) = \frac{P\left(\overline{O} \cap I\right)}{P\left(\overline{O}\right)} = \frac{P(I) \times P_I\left(\overline{O}\right)}{P\left(\overline{O}\right)} = \frac{0,7 \times (1 - 0,95)}{1 - 0,926} = 0,473 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

La probabilité que le client soit un client internet est environ $0, 0,473$ et donc la probabilité que le client soit un client mobile est donc environ $0,527$. Par suite, il est plus probable que le client dont l'appel n'a pas abouti soit un client mobile.

Partie C - Enquête de satisfaction

Ici $n = 1303$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,85$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 1107,55 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 195,45 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,85 - 1,96\sqrt{\frac{0,85 \times 0,15}{1303}}; 0,85 + 1,96\sqrt{\frac{0,85 \times 0,15}{1303}}\right] = [0,830; 0,870]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

La fréquence observée est $f = \dfrac{1150}{1303} = 0,882\ldots$ et elle n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation. Donc, on peut estimer, au risque de se tromper de 5%, que l'entreprise se trompe, en sa défaveur.

EXERCICE 2

1) a) D'après le théorème de Pythagore, $R^2 = h^2 + \ell^2$ et donc $\ell^2 = R^2 - h^2$. L'aire $\mathscr{A}$ est donc égale à $\pi\ell^2$ ou encore $\pi\left(R^2 - h^2\right)$ puis le volume du cône est

$$V(h) = \frac{1}{3}\mathscr{A}h = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - h^2\right)h = \frac{1}{3}\pi\left(400 - h^2\right)h.$$

b) Pour tout réel h de $[0, R]$, $V(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2h - h^3\right)$. La fonction V est dérivable sur $[0, R]$ et pour tout h de $[0, R]$,

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2 - 3h^2\right) = -\pi\left(h^2 - \frac{R^2}{3}\right) = -\pi\left(h - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)\left(h + \frac{R}{\sqrt{3}}\right).$$

Pour $h \in [0, R]$, $V'(h)$ est du signe de $-\left(h - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ avec $0 < \frac{R}{\sqrt{3}} < R$. Par suite, la fonction V' est strictement positive sur $\left[0, \frac{R}{\sqrt{3}}\right[$ et strictement négative sur $\left]\frac{R}{\sqrt{3}}, R\right]$. On en déduit que la fonction V est strictement croissante sur $\left[0, \frac{R}{\sqrt{3}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{R}{\sqrt{3}}, R\right]$.

La fonction V admet un maximum en $\frac{R}{\sqrt{3}}$ et ce volume maximum est

$$V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right)\frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} \times \frac{2R^2}{3} \times \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}.$$

Plus précisément, le volume maximum est $V\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16\,000\pi}{9\sqrt{3}} = 3225$ cm^3 arrondi au cm^3. Il est obtenu pour une hauteur

$$h = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = 11,6 \text{ cm arrondi au dixième de centimètre.}$$

c) Le périmètre du disque de base est $2\pi\ell$ et aussi $(2\pi - \alpha)R$. Donc $(2\pi - \alpha)R = 2\pi\ell$ puis $2\pi - \alpha = \frac{2\pi\ell}{R}$ et donc $\alpha = 2\pi - \frac{2\pi\ell}{R}$. Quand le volume est maximum, $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ et donc $\ell = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \sqrt{\frac{2R^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ et donc

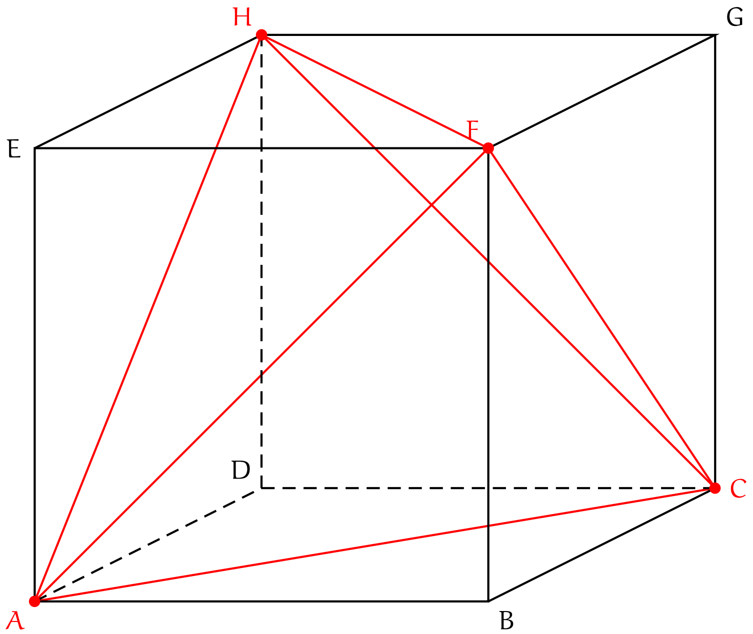
$$\alpha = 2\pi - \frac{2\pi\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}}{R} = 2\pi - \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \text{ radians,}$$

ou encore $\alpha = 66°$ arrondi au degré.

2) Le calcul de la question précédente montre que α ne dépend pas de R.

EXERCICE 3

1) Les faces du cube sont des carrés dont le côté a pour longueur AB. Donc, les segments $[AC]$, $[CF]$, $[FA]$, $[AH]$, $[FH]$ et $[CH]$ ont tous la mêmes longueur à savoir $AB\sqrt{2}$. Par suite, les quatre faces du tétraèdre $ACFH$ sont des triangles équilatéraux ou encore le tétraèdre $ACFH$ est un tétraèdre régulier et ce tétraèdre est inscrit dans le cube $ABCDEFGH$.



2) On note Ω' le point représentant l'atome de carbone puis (x, y, z) les coordonnées de Ω'. Les points A, C, F et H ont pour coordonnées respectives $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$.

$$\Omega'A = \Omega'C = \Omega'F = \Omega'H \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Omega'C^2 = \Omega'A^2 \\ \Omega'F^2 = \Omega'A^2 \\ \Omega'H^2 = \Omega'A^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x - 2y + 2 = 0 \\ -2x - 2z + 2 = 0 \\ -2y - 2z + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ y + z = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x + 1 \\ x + z = 1 \\ (-x + 1) + z = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -x + 1 \\ z = x \\ x + x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, le point Ω' a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Donc, le centre Ω du cube $ABCDEFGH$, qui est le milieu du segment $[AG]$, a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Finalement, le point Ω' est le centre Ω du cube $ABCDEFGH$.

3) Les points Ω, A et C ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$. Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega C}$ ont donc pour coordonnées respectives $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

- $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega C} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.
- $\Omega A = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \Omega C$.

Donc,

$$\cos\left(\widehat{A\Omega C}\right) = \frac{\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega A \times \Omega C} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}.$$

La calculatrice fournit alors $\widehat{A\Omega C} = 109,5°$ arrondi au dixième de degré.

EXERCICE 4.

Partie A - Cas général

1) La fonction v est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif t,

$$v'(t) = 9,81 \times \frac{m}{k} \times \left(-\left(-\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right) = 9,81e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Pour tout réel positif t, on a $v'(t) > 0$ et donc la fonction v est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2) La vitesse croît ou encore la goutte d'eau accélère dans sa chute. Elle ne ralentit pas.

3) Puisque $\frac{k}{m} > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 9,81\frac{m}{k}(1-0) = 9,81\frac{m}{k}$.

4) Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
v(t) \geqslant 0,99 \times 9,81\frac{m}{k} &\Leftrightarrow 9,81\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \geqslant 0,99 \times 9,81\frac{m}{k} \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{k}{m}t} \geqslant 0,99\\
&\Leftrightarrow 0,01 \geqslant e^{-\frac{k}{m}t} \Leftrightarrow e^{-\frac{k}{m}t} \leqslant \frac{1}{100}\\
&\Leftrightarrow \ln\left(e^{-\frac{k}{m}t}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{100}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[)\\
&\Leftrightarrow -\frac{k}{m}t \leqslant -\ln(100) \Leftrightarrow t \geqslant \frac{m\ln(100)}{k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, à partir de l'instant $t_0 = \frac{m\ln(100)}{k}$, la vitesse de la goutte d'eau dépasse 99% de sa vitesse limite. Or, $\ln(100) = 4,6\ldots$ et donc $5 \geqslant \ln(100)$ puis $\frac{5m}{k} \geqslant \frac{m\ln(100)}{k}$. L'affirmation du scientifique est donc correcte.

Partie B

1) Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned}
v(t) = 15 &\Leftrightarrow 9,81\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = 15 \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{15k}{9,81m}\\
&\Leftrightarrow e^{-\frac{k}{m}t} = 1 - \frac{15k}{9,81m} \Leftrightarrow -\frac{k}{m}t = \ln\left(1 - \frac{15k}{9,81m}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{m}{k}\ln\left(1 - \frac{15k}{9,81m}\right),
\end{aligned}$$

avec

$$1 - \frac{15k}{9,81m} = 1 - \frac{15 \times 3,9}{9,81 \times 6} = 1 - \frac{15 \times 390}{981 \times 6} = 1 - \frac{5 \times 65}{327} = \frac{2}{327}$$

et donc $v(t) = 15$ si et seulement si $t = -\frac{6}{3,9}\ln\left(\frac{2}{327}\right)$ ou encore $t = \frac{6}{3,9}\ln\left(\frac{327}{2}\right)$.

La calculatrice fournit $\frac{6}{3,9}\ln\left(\frac{327}{2}\right) = 7,8$ secondes arrondi au dixième de seconde.

2) La vitesse moyenne v_{moy} sur l'intervalle de temps allant de 0 à $\frac{6}{3,9}\ln\left(\frac{327}{2}\right)$ est la valeur moyenne de la vitesse instantanée sur l'intervalle $\left[0, \frac{6}{3,9}\ln\left(\frac{327}{2}\right)\right]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right)} v(t)\,dt &= 9,81\frac{m}{k}\int_0^{\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right)}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt = 9,81\frac{m}{k}\left(\int_0^{\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right)} 1\,dt - \int_0^{\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right)} e^{-\frac{k}{m}t}\,dt\right)\\
&= 9,81\frac{m}{k}\left(\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \left[-\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right]_0^{\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right)}\right)\\
&= 9,81\frac{m}{k}\left(\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \left(\left(-\frac{m}{k}e^{-\ln\left(\frac{327}{2}\right)}\right) - \left(-\frac{m}{k}e^{0}\right)\right)\right)\\
&= 9,81\frac{m}{k}\left(\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right) + \frac{m}{k}e^{-\ln\left(\frac{327}{2}\right)} - \frac{m}{k}\right) = 9,81\frac{m^2}{k^2}\left(\ln\left(\frac{327}{2}\right) + \frac{2}{327} - 1\right)\\
&= 9,81\frac{m^2}{k^2}\left(\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \frac{325}{327}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
v_{moy} &= \frac{1}{\dfrac{6}{3,9}\ln\left(\dfrac{327}{2}\right)}\int_0^{\frac{6}{3,9}\ln\left(\frac{327}{2}\right)} v(t)\ dt = \frac{1}{\dfrac{6}{3,9}\ln\left(\dfrac{327}{2}\right)} \times 9,81\,\frac{6^2}{3,9^2}\left(\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \frac{325}{327}\right)\\
&= \frac{6\times 9,81}{3,9\ln\left(\dfrac{327}{2}\right)}\left(\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \frac{325}{327}\right)\\
&= 12,1 \text{ m.s}^{-1} \text{ arrondi au dixième de m.s}^{-1}.
\end{aligned}$$

