Liban 2018. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) L'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$. Donc, en moyenne, le temps d'attente d'un étudiant, exprimé en secondes, est :

$$E(X)+E(Y)=\frac{1}{\lambda}+\mu=\frac{1}{0,02}+96=50+96=146 \text{ s},$$

ou aussi 2 min 26 s.

2) a) Puisque 2 minutes sont aussi 120 secondes, la probabilité demandée est $P(X \geqslant 120)$. Or, pour $t \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t=1-e^{-\lambda t}=1-e^{-0,02t}.$$

Par suite,

$$P(X \geqslant 120)=1-P(X<120)=1-P(X \leqslant 120)=1-\left(1-e^{-0,02\times 120}\right)=e^{-2,4}=0,091 \text{ arrondi au millième)}.$$

b) La probabilité demandée est $P(Y \leqslant 90)$. La calculatrice fournit $P(Y \leqslant 90)=0,409$ arrondi au millième.

3) La loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement. Donc, $P_{X\geqslant 60}(X \leqslant 60+30)=P(X \leqslant 30)$. Une fois que l'on a attendu une minute, la probabilité d'attendre encore 30 secondes est la même que celle qu'on avait au départ. L'étudiante a eu tort de raccrocher car elle n'a pas augmenté ses chances mais elle a perdu le temps utilisé pour rappeler.

EXERCICE 2

1) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Ensuite, $1-i = \overline{(1+i)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
S_n &= (1+i)^n + (1-i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \\
&= 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Si $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) > 0$, la forme trigonométrique de S_n est $2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)(\cos(0) + i\sin(0))$.
Si $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) < 0$, la forme trigonométrique de S_n est $-2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.
Si $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$, S_n n'admet pas de forme trigonométrique.

b) Pour tout entier naturel n, S_n est un nombre réel. Donc, l'affirmation A est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = 0 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0.$$

Si n est un entier naturel de la forme $2+4k$ où k est un entier naturel, alors

$$\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{(2+4k)\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

et donc $S_n = 0$. Ainsi, si n est l'un des entiers 2, 6, 10, 14, ..., S_n est nul. Donc, l'affirmation B est vraie.

EXERCICE 3

1) a) A l'instant 0, le sous-marin est en $S_1(0)$ où le point $S_1(0)$ a pour coordonnées $(140, 105, -170)$.

b) Le point $S_1(60)$ a pour coordonnées $(-3460, -5295, -1970)$. Puisque le premier sous-marin se déplace à vitesse constante en ligne droite, la distance, exprimée en mètres, parcourue par le premier sous-marin en une heure est $S_1(0)S_1(60)$.

$$\begin{aligned}S_1(0)S_1(60) &= \sqrt{(-3460-140)^2+(-5295-105)^2+(-1970+170)^2} = \sqrt{3600^2+5400^2+1800^2}\\ &= \sqrt{45\,360\,000} = 6\,734,98\ldots\end{aligned}$$

En une heure, le premier sous-marin parcourt $6,7$ km arrondi au dixième de kilomètre ou encore la vitesse du premier sous-marin est $6,7$ km/h arrondi au dixième de kilomètre par heure.

c) Le point $S_1(1)$ a pour coordonnées $(80, 15, -200)$. Le vecteur $\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)}$ a pour coordonnées $(-60, -90, -30)$. L'angle α est l'angle non orienté entre le vecteur $\overrightarrow{u} = -\dfrac{1}{30}\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)}$ de coordonnées $(2, 3, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(2, 3, 0)$.

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2\times 2+3\times 3+1\times 0 = 13$.
- $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$ et $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{2^2+3^2+0^2} = \sqrt{13}$.

Donc,

$$\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\|u\|\times\|v\|} = \frac{13}{\sqrt{14}\times\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{13}{14}}.$$

La calculatrice fournit alors $\alpha = 15,5°$ à dixième de degré près.

2) Le point $S_2(t)$ se déplace sur une droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l}x = 68+at\\ y = 135+bt\\ z = -68+ct\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R},$$

(on a donc pris pour paramètre le temps t) où a, b et c sont trois réels non tous nuls à déterminer. La condition « $S_2(3)$ a pour coordonnées $(-202, -405, -248)$ » fournit $\left\{\begin{array}{l}-202 = 68+3a\\ -405 = 135+3b\\ -248 = -68+3c\end{array}\right.$ et donc $a = -90$, $b = -180$ et $c = -60$. Ainsi, le point $S_2(t)$ a pour coordonnées à l'instant t : $\left\{\begin{array}{l}x(t) = 68-90t\\ y(t) = 135-180t\\ z(t) = -68-60t\end{array}\right.$.

Les deux sous-marins sont à la même profondeur si et seulement si $-170-30t = -68-60t$ ce qui équivaut à $t = \dfrac{102}{30} = 3,4$. Les deux sous-marins sont à la même profondeur à l'instant $t = 3,4$ min.

On peut noter que quand $t = 3,4$ l'abscisse du point $S_1(t)$ est $140-60\times 3,4 = -64$ et l'abscisse du point $S_2(t)$ est $68-90\times 3,4 = -238$. Donc, il n'y a pas de collision entre les deux sous-marins.

EXERCICE 4.

1) Soit n un entier naturel non nul. Puisque pour tout x de $[1,5]$, $x^n \neq 0$, la fonction f_n est dérivable sur $[1,5]$ et pour $x \in [1,5]$

$$f_n'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^n - \ln x \times nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{x^{n-1} - nx^{n-1}\ln x}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1}(1 - n\ln x)}{x^{2n}} = \frac{1 - n\ln x}{x^{2n-(n-1)}} = \frac{1 - n\ln x}{x^{n+1}}.$$

2) Soit n un entier naturel non nul. Notons (x_n, y_n), avec $y_n = f_n(x_n)$, les coordonnées du point A_n. En admettant que $x_n \in]1,5[$, on a nécessairement $f_n'(x_n) = 0$. Or,

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - n\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{n} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{n}}.$$

Donc, $x_n = e^{\frac{1}{n}}$ puis

$$y_n = f_n(x_n) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}{e} = \frac{1}{e}\ln(x_n).$$

Donc, le point A_n appartient à la courbe d'équation $y = \frac{1}{e}\ln(x)$.

3) a) Soit $x \in [1,5]$. La fonction ln est croissante sur l'intervalle $[1,5]$ et donc $\ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$ ou encore $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$. En divisant les trois membres de cet encadrement par le réel strictement positif x^n, on obtient

$$\text{pour tout } x \text{ de } [1,5],\ 0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{5^n}.$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^5 x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^5 = \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^5 = -\frac{1}{(n-1)5^{n-1}} + \frac{1}{n-1}$$
$$= \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

c) Soit n un entier naturel non nul. Puisque la fonction f_n est continue et positive sur $[1,5]$, l'aire $\mathscr{A}_n$ considérée est

$$\mathscr{A}_n = \int_1^5 f_n(x)\,dx = \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,dx.$$

D'après la question 3)a) et par positivité et croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \mathscr{A}_n \leqslant \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n}\,dx = \ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{\ln 5}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$

Puisque $-1 < \frac{1}{5} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln 5}{n-1} = 0$. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 5}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0 \times (1-0) = 0.$$

Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n = 0$.

EXERCICE 5.

1) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_2 = P\left(G_2\right) &= P\left(G_1\right) \times P_{G_1}\left(G_2\right) + P\left(\overline{G_1}\right) \times P_{\overline{G_1}}\left(G_2\right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

2) Soit n un entier naturel non nul. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P\left(G_{n+1}\right) &= P\left(G_n\right) \times P_{G_n}\left(G_{n+1}\right) + P\left(\overline{G_n}\right) \times P_{\overline{G_n}}\left(G_{n+1}\right) \\ &= p_n \times \frac{1}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3) Il semble que la suite (p_n) converge vers $0,4$.

4) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10} = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{4}u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.

b) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et de premier $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$.

On sait alors que pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

puis

$$p_n = \frac{2}{5} + u_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

c) Puisque $-1 < -\frac{1}{4} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{5} = 0,4$. Ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre de parties, le joueur a environ 40% de chances de gagner une partie.

