

# Chapitre I – Les suites

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

## TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Généralités</b> . . . . .	<b>1</b>
1. Définition . . . . .	1
2. Suites arithmétiques . . . . .	1
3. Suites géométriques . . . . .	3
<b>II - Étude des suites</b> . . . . .	<b>5</b>
1. Sens de variation . . . . .	5
2. Introduction aux limites . . . . .	5
3. Représentation graphique . . . . .	6

# I - Généralités

## 1. Définition

On appelle **suite** une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  : cette fonction va prendre des éléments de l'ensemble de départ  $\mathbb{N}$  et va les amener dans l'ensemble d'arrivée  $\mathbb{R}$ .

À RETENIR

### Définition

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

- **Par récurrence** : On donne le premier terme de la suite ainsi que le terme au rang  $n + 1$ .
- **Par son terme général** : On donne le  $n$ -ième terme de la suite en fonction de  $n$ .

**Attention!** Bien que ces deux modes de génération soient les principaux, il en existe d'autres : algorithme, motifs géométriques, ...

À LIRE

### Exemple

On définit les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ainsi :

- $u_n = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ( $(u_n)$  est définie par son terme général).
- $(v_n) = \begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + 1 \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases}$  ( $(v_n)$  est définie par récurrence).

On remarque que bien que définies différemment,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont égales.

À LIRE

À ne pas confondre :

- $(u_n)$  qui est la **suite**  $(u_n)$ .
- $u_n$  qui est le  **$n$ -ième terme** de la suite  $(u_n)$ .

Ce ne sont pas les mêmes objets : le premier est une suite, le second est un réel.

## 2. Suites arithmétiques

À RETENIR

### Définition

Une suite  $(u_n)$  est dite **arithmétique** si elle est de la forme  $u_{n+1} = u_n + r$  avec  $r \in \mathbb{R}$ .

À RETENIR

### Raison

Le réel  $r$  est la **raison** de la suite (si  $r > 0$ ,  $(u_n)$  est strictement croissante, si  $r < 0$ ,  $(u_n)$  est strictement décroissante et si  $r = 0$ ,  $(u_n)$  est constante).

Il est possible de trouver le terme général d'une suite arithmétique :

## À RETENIR

## Terme général

On note  $p$  le rang initial de la suite (celui à partir duquel la suite est définie). Alors, pour tout  $n \geq p$  :

$$u_n = u_p + (n - p) \times r$$

Et si  $(u_n)$  est définie à partir du rang 0 (on a  $p = 0$ ), alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = u_0 + (n - 0) \times r = u_0 + n \times r$$

## DÉMONSTRATION

## Terme général

On a  $u_{p+1} = u_p + r$ . Puis,  $u_{p+2} = u_{p+1} + r = u_p + r + r = u_p + 2 \times r$ . De même,  $u_{p+3} = u_{p+2} + r = u_p + 3 \times r$  et caetera.

En fait, pour tout  $k$  entier plus grand que  $p$ , on a  $u_{p+k} = u_p + k \times r$ .

Donc si on pose  $n = p + k$ , alors  $u_n = u_p + (n - p) \times r$ .

## À RETENIR

## Somme des termes

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

## DÉMONSTRATION

## Somme des termes

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ . On a également  $S_n = n + (n - 1) + \cdots + 1$  (en écrivant la somme à l'envers).

D'où  $S_n + S_n = 2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ fois}} = n \times (n+1)$ . Et ainsi  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

## À LIRE

## Exemple

On souhaite calculer  $S = 24 + 25 + \cdots + 104$ .

En fait,  $S = 1 + 2 + \cdots + 23 + 24 + 25 + \cdots + 104 - (1 + 2 + \cdots + 23)$ . Calculons les deux sommes séparément :

$$- 1 + 2 + \cdots + 23 = \frac{23 \times 24}{2} = 276$$

$$- 1 + 2 + \cdots + 104 = \frac{104 \times 105}{2} = 5460$$

D'où  $S = 5460 - 276 = 5184$ .

### 3. Suites géométriques

À RETENIR

#### Définition

Une suite  $(v_n)$  est dite **géométrique** si elle est de la forme  $v_{n+1} = v_n \times q$  avec  $q \in \mathbb{R}$ .

À RETENIR

#### Raison

Le réel  $q$  est la **raison** de la suite (si  $q > 1$ ,  $(v_n)$  est strictement croissante, si  $0 < q < 1$ ,  $(v_n)$  est strictement décroissante et si  $q = 1$  ou  $0$ ,  $(v_n)$  est constante).

Il est possible de trouver le terme général d'une suite géométrique :

À RETENIR

#### Terme général

On note  $p$  le rang initial de la suite (celui à partir duquel la suite est définie). Alors, pour tout  $n \geq p$  :

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Et si  $(u_n)$  est définie à partir du rang 0 (on a  $p = 0$ ), alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_n = v_0 \times q^{n-0} = v_0 \times q^n$$

DÉMONSTRATION

#### Terme général

On a  $v_{p+1} = v_p \times q$ . Puis,  $v_{p+2} = v_{p+1} \times q = v_p \times q \times q = v_p \times q^2$ . De même,  $v_{p+3} = v_{p+2} \times q = v_p \times q^3$  et caetera.

En fait, pour tout  $k$  entier plus grand que  $p$ , on a  $v_{p+k} = v_p \times q^k$ .

Donc si on pose  $n = p + k$ , alors  $v_n = v_p \times q^{n-p}$ .

À RETENIR

#### Somme des termes

Soit  $n \neq 0$  un entier et  $q$  un réel, alors :

- Si  $q \neq 1$ , alors  $1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .
- Si  $q = 1$ , alors  $1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}} = n$ .

## DÉMONSTRATION

## Somme des termes

Le cas  $q = 1$  étant donné juste au-dessus, on supposera  $q \neq 1$ . On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = 1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n$ .

On a :  $qS_n = q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$ , puis :  $S_n - qS_n = 1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n - q^1 - q^2 - q^3 - \dots - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$ .

Donc on a en factorisant par  $S_n$  :  $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1} \iff S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .

## À LIRE

## Exemple

On souhaite calculer  $S = 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{10}$ .

En fait,  $S = 1 + 3 + \dots + 3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{10} - (1 + \dots + 3^4)$ . Calculons les deux sommes séparément :

$$- 1 + 3 + \dots + 3^4 = \frac{1 - 3^5}{1 - 3} = 121$$

$$- 1 + 3 + \dots + 3^{10} = \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = 88573$$

D'où  $S = 88573 - 121 = 88452$ .

## II - Étude des suites

### 1. Sens de variation

À RETENIR

#### Définition

Soit  $(u_n)$  une suite.

- $(u_n)$  est **croissante** si on a  $u_{n+1} \geq u_n$  (ou  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- $(u_n)$  est **décroissante** si on a  $u_{n+1} \leq u_n$  (ou  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- $(u_n)$  est dite **constante** s'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n = c$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Si une suite est croissante ou décroissante et ne change pas de variation, alors elle est dite **monotone**.

### 2. Introduction aux limites

Quand on souhaite s'intéresser à la limite d'une suite  $(u_n)$ , on étudie le comportement de ses termes quand " $n$  devient très grand". On préfère dire alors que  $n$  **tend vers**  $+\infty$ .

À RETENIR

#### Définition

Soit  $(u_n)$  une suite.

- Si  $(u_n)$  tend vers un réel quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on dit qu'elle **converge**.
- Si  $(u_n)$  tend vers une limite infinie quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on dit qu'elle **diverge**.

À LIRE

#### Exemple

On définit la suite  $(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{1}{n}$ . On souhaite trouver la limite possible de cette suite en  $+\infty$ .

Pour cela, regardons les valeurs que prend cette suite pour des valeurs de  $n$  très grandes :

100	0,01
1000	0,001
100000	0,00001
1000000000	0,000000001

**Il semble que** cette suite converge vers 0.

À savoir que si une suite a une limite, alors cette limite est **unique**. Mais il est également possible pour une suite de ne pas admettre de limite.

À LIRE ☞

### Exemple

On définit la suite  $(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = (-1)^n$ . On souhaite trouver la limite possible de cette suite en  $+\infty$ .

100	1
101	-1
1000000	1
1000001	-1

En fait, si  $n$  est pair cette suite vaut 1 et si  $n$  est impair elle vaut  $-1$ . Cette suite n'admet donc pas de limite : elle diverge.

## 3. Représentation graphique

Il est possible de représenter graphiquement une suite. Cela peut aider, par exemple dans le but de chercher sa limite.

À RETENIR

### Méthode pour une suite définie par récurrence

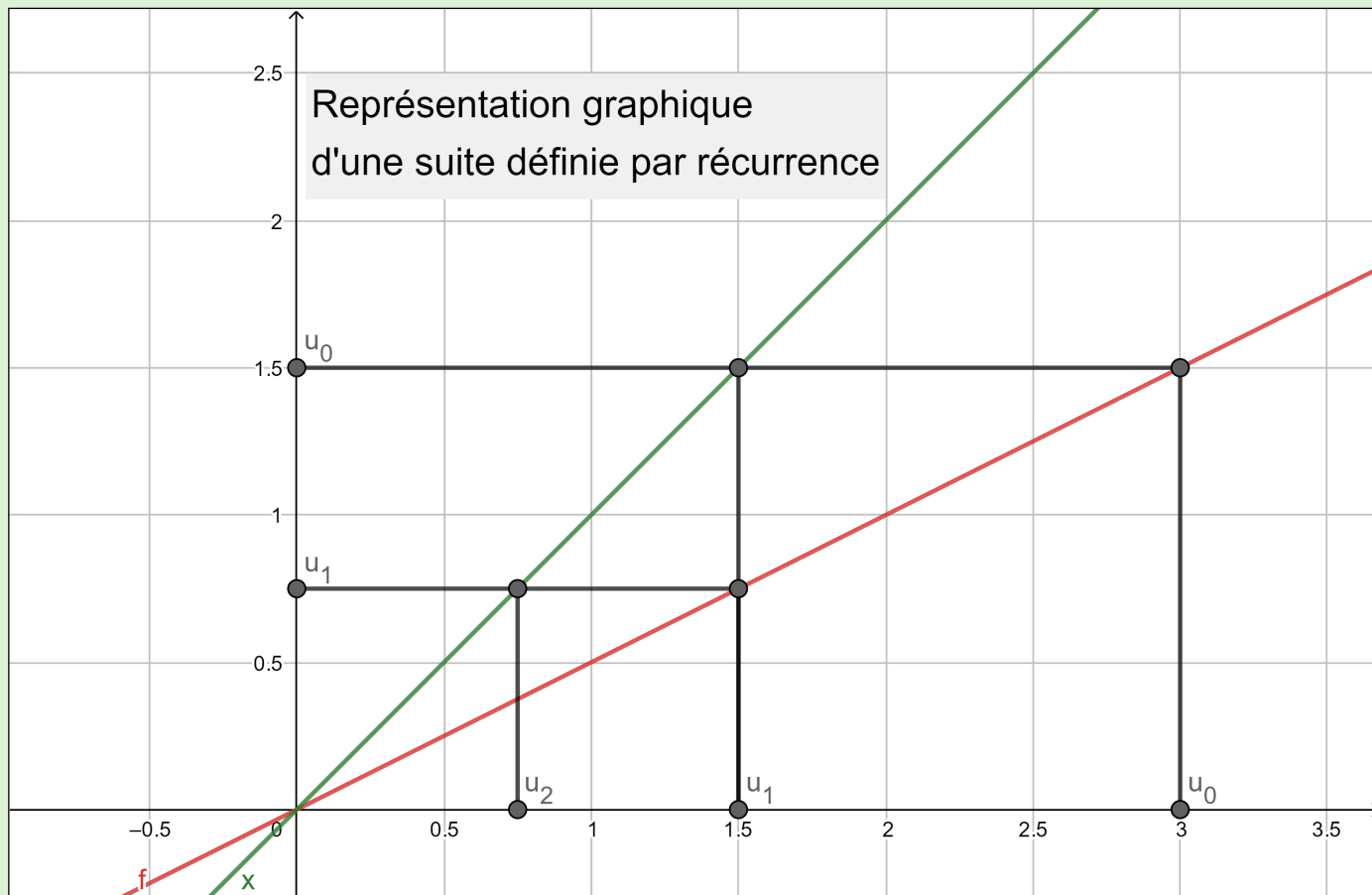
Soit  $(u_n)$  une suite définie par récurrence. Pour représenter  $(u_n)$  dans un graphique :

1. On trace la droite d'équation  $y = x$ .
2. Comme cette suite est définie par récurrence, pour tout entier  $n$  on a une relation du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Il s'agit de tracer la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$ .
3. On place le point  $A$  de coordonnées  $(u_0; 0)$ .
4. On trace une droite verticale passant par  $A$ , son intersection avec  $\mathcal{C}_f$  donne un point  $B = (u_0; u_1)$ .
5. À l'aide du point  $B$ , on place le point  $C = (0; u_1)$ .
6. On trace une droite horizontale passant par  $C$ , son intersection avec la droite  $y = x$  donne un point  $D = (u_1; u_1)$ .
7. Une fois le point  $D$  obtenu, on place le point  $(u_1; 0)$ .
8. On recommence l'opération en remplaçant  $u_0$  par  $u_1$  et  $u_1$  par  $u_2$ , puis on recommence, etc.

À LIRE ☞

## Exemple

Représentation des trois premiers termes de la suite  $(u_n) = \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$ .



Il est cependant plus facile de représenter graphiquement une suite dont on connaît le terme général.

À RETENIR 📌

## Méthode pour une suite définie par son terme général

Soit  $(v_n)$  une suite définie par son terme général. Pour représenter  $(v_n)$  dans un graphique :

1. On place le point de coordonnées  $(0; v_0)$ .
2. On place le point de coordonnées  $(1; v_1)$ .
3. On place le point de coordonnées  $(2; v_2)$ . Etc.



À LIRE 99

## Exemple

Représentation des trois premiers termes de la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = 2^n$ .

