



Chapitre VI – Primitives et équations différentielles

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

TABLE DES MATIÈRES

I - Primitives de fonctions continues	1
1. Définition	1
2. Primitive de fonctions usuelles	1
3. Opérations sur les primitives	2
II - Équations différentielles	4
1. Qu'est-ce-qu'une équation différentielle?	4
2. Résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay$	4
3. Résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay + b$	5

I - Primitives de fonctions continues

1. Définition

À RETENIR

Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . On appelle **primitive** de f , toute fonction F définie sur I et qui vérifie pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = f(x)$$

À LIRE

Note

Une primitive est toujours définie à une constante près.

En effet. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. Alors, $F_1 : x \mapsto x^2 + 1$ est une primitive de la fonction f (car pour tout x , $F_1'(x) = 2x = f(x)$).

Mais F_1 **n'est pas la seule primitive** de f ! On peut citer par exemple $F_2 : x \mapsto x^2 + 10$ et $F_3 : x \mapsto x^2 + 3$ qui sont également des primitives de f .

C'est pour cette raison que l'on dit que les primitives sont définies à une constante près (lorsque l'on dérive, la constante devient nulle).

Ainsi, toute **fonction continue** sur un intervalle admet **une infinité de primitives** d'une forme particulière sur cet intervalle. Plus formellement :

À RETENIR

Infinité de primitives

Une fonction continue f sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur I de la forme $x \mapsto F_0(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ (où F_0 est une primitive de f).

DÉMONSTRATION

Infinité de primitives

Soit F une autre primitive de f sur I . On a pour tout $x \in I$:

$$(F - F_0)'(x) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0 \text{ (car } F_0 \text{ et } F \text{ sont deux primitives de } f\text{)}.$$

Donc il existe une constante réelle c telle que $F - F_0 = c$. D'où pour tout $x \in I$, $F(x) = F_0(x) + c$: ce qu'il fallait démontrer.

2. Primitive de fonctions usuelles

Le tableau suivant est à connaître (mais il peut être obtenu en prenant celui des dérivées usuelles à l'envers) :

À RETENIR

Soient λ et a deux constantes réelles avec $a \neq 1$.

Fonction	Primitive	Domaine de définition de la primitive
$x \mapsto \lambda$	$x \mapsto \lambda x$	\mathbb{R}
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	\mathbb{R}_+^*
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	\mathbb{R}_+^*
$x \mapsto x^a$	$x \mapsto \frac{1}{a+1}x^{a+1}$	\mathbb{R}_+^*
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	\mathbb{R}
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	\mathbb{R}

3. Opérations sur les primitives

Le tableau suivant est également à connaître (mais il peut être obtenu en prenant celui des dérivées usuelles à l'envers) :

À RETENIR

Soit u une fonction continue.

Fonction	Primitive	Domaine de définition de la primitive
$u' e^u$	e^u	En tout point où u est définie.
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	En tout point où u est définie et est non-nulle. On peut retirer la valeur absolue si u est positive.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	En tout point où u est définie et est strictement positive.
$u'(u)^a$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} u^{a+1}$	En tout point où u est définie.
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	En tout point où u est définie.
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	En tout point où u est définie.

II - Équations différentielles

1. Qu'est-ce-qu'une équation différentielle?

Commençons cette partie par quelques définitions.

À RETENIR

Définition

- Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y à ses dérivées successives (y' , y'' , ...) contenant éventuellement d'autres fonctions connues.
- Une **solution** d'une équation différentielle est une fonction vérifiant l'égalité décrite précédemment.

À LIRE

Exemple

La fonction logarithme est une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x}$.

La fonction exponentielle est une solution de l'équation différentielle $y' = y$, mais aussi de l'équation différentielle $y'' = y$, etc.

2. Résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay$

Nous allons donner une formule permettant de résoudre des équations différentielles de la forme $y' = ay$.

À RETENIR

Formule

On pose $(E) : y' = ay$ (où a est un réel). Alors l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions $x \mapsto ce^{ax}$ où $c \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION

Vérifions tout d'abord que les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$ sont solutions de (E) . Soit $c \in \mathbb{R}$, posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_c(x) = ce^{ax}$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_c(x) = ace^{ax}$ et $ay_c(x) = ace^{ax}$. Donc $y'_c = ay_c$: y_c est bien solution de (E) .

Montrons que les fonctions y_c sont les seules solutions de (E) . Soit y une solution quelconque de (E) sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $z(x) = y(x)e^{-ax}$. En dérivant :

$$z'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x)(-ae^{-ax}) = e^{-ax}(y'(x) - ay(x))$$

De plus, comme y est solution de (E) , on a $y' - ay = 0$, donc $z' = 0$.

Ainsi, il existe une constante réelle c telle que $z = c$. C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$c = y(x)e^{-ax} \iff y(x) = ce^{ax}. \text{ Ce qui termine la preuve.}$$

À RETENIR

Théorème

Pour tout réels x_0 et y_0 , il existe une **unique** fonction y solution de l'équation différentielle (E) telle que $y(x_0) = y_0$.

À LIRE

Exemple

Résolvons l'équation différentielle $(E) : y' - 5y = 0$ sous condition d'avoir $y(0) = 1$.

Dans un premier temps, on écrit l'équation sous une meilleure forme : $y' - 5y = 0 \iff y' = 5y$. On a donc $a = 5$. Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies $x \mapsto ce^{5x}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Maintenant, il faut trouver la fonction y qui vaut 1 en 0. Soit donc y une telle solution de (E) . Alors :

$y(0) = 1 \iff ce^{5 \times 0} = 1 \iff c = e^{-1}$. La solution recherchée est donc la fonction $y : x \mapsto e^{-1}e^{5x}$.

3. Résolution d'équations différentielles de la forme $y' = ay + b$

Nous allons donner une formule permettant de résoudre des équations différentielles de la forme $y' = ay + b$.

À RETENIR

Formule

On pose $(E) : y' = ay + b$ (où a est un réel non-nul et b est un réel). Alors l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions $x \mapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où $c \in \mathbb{R}$.

À RETENIR

Théorème

Pour tout réels x_0 et y_0 , il existe une **unique** fonction y solution de l'équation différentielle (E) telle que $y(x_0) = y_0$.

À LIRE

Exemple

Résolvons l'équation différentielle $(E) : y' = 2y - 1$ sous condition d'avoir $y(1) = 0$.

On a donc $a = 2$ et $b = -1$. Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies $x \mapsto ce^{2x} + \frac{1}{2}$ où $c \in \mathbb{R}$.

Maintenant, il faut trouver la fonction y qui vaut 0 en 1. Soit donc y une telle solution de (E) . Alors :

$$y(1) = 0 \iff ce^{2 \times 1} + \frac{1}{2} = 0 \iff c = -\frac{1}{2e^2}$$

La solution recherchée est donc la fonction $y : x \mapsto -\frac{e^{2x}}{2e^2} + \frac{1}{2}$.