

# Chapitre II – Les polynômes du second degré

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

## TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Fonctions polynômiales du second degré</b> . . . . .	<b>1</b>
1. Définition . . . . .	1
2. Représentation graphique . . . . .	1
<b>II - Recherche de racines</b> . . . . .	<b>3</b>
1. Définition . . . . .	3
2. Discriminant . . . . .	3
3. Racines évidentes . . . . .	4
4. Somme et produit de racines . . . . .	4
5. Forme factorisée . . . . .	5
<b>III - Étude des fonctions polynômiales du second degré</b> . . . . .	<b>6</b>
1. Signe . . . . .	6
2. Variations . . . . .	6
3. Axe de symétrie . . . . .	7

# I - Fonctions polynômiales du second degré

## 1. Définition

À RETENIR

### Définition

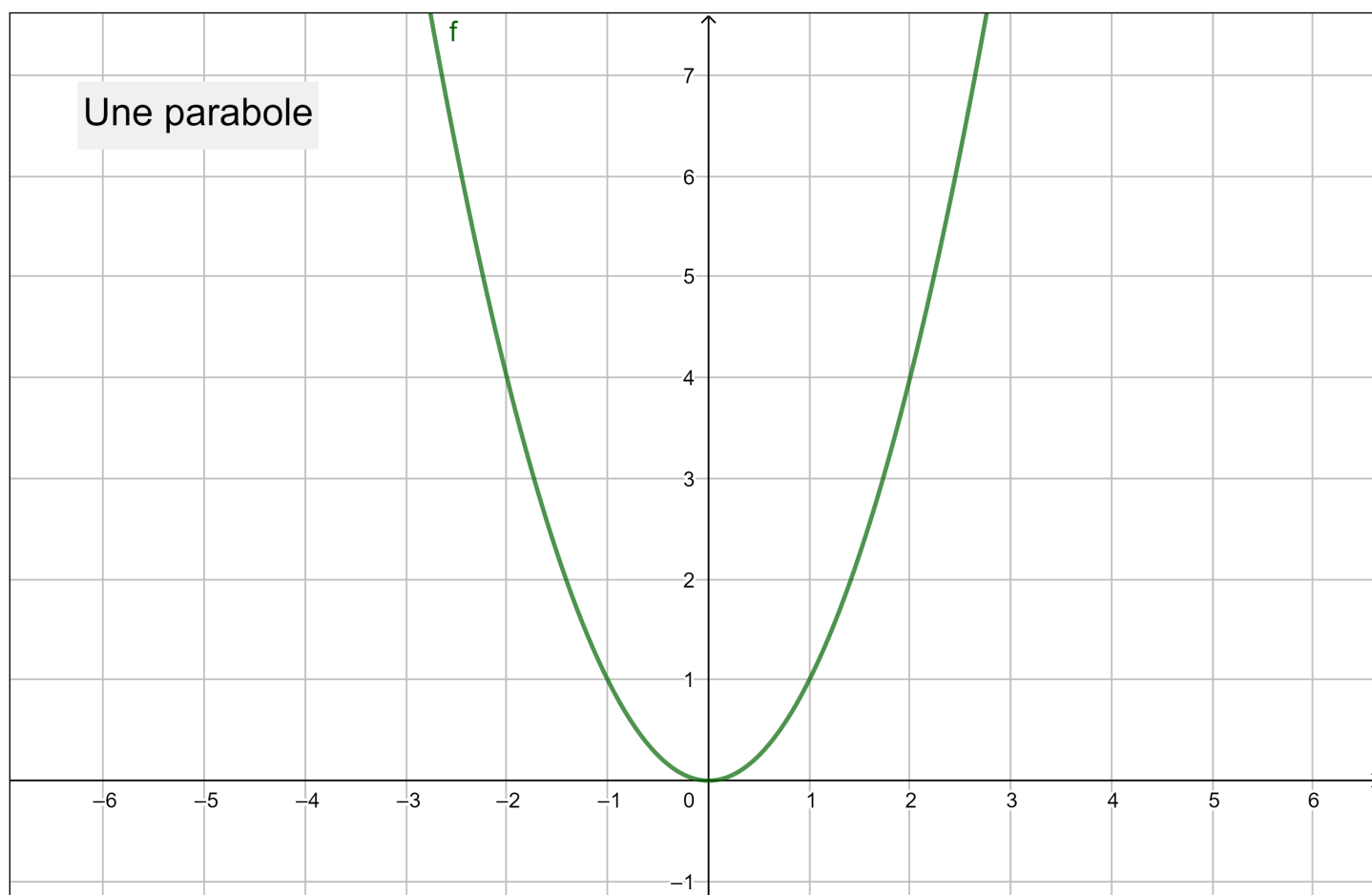
Soit  $f$  une fonction.  $f$  est une **fonction polynômiale du second degré** si elle est de la forme  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  réels qui sont les **coefficients** de  $f$ .

## 2. Représentation graphique

À RETENIR

### Parabole

Soit  $f$  une fonction polynômiale du second degré. Alors la courbe représentative de  $f$  (notée  $\mathcal{C}_f$ ) est une **parabole**.



À LIRE ☞

### Parité d'une fonction

On voit sur la représentation ci-dessus que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : la fonction  $f$  représentée est **paire** (i.e. pour tout  $x \in D_f$ ,  $f(-x) = f(x)$ ).

Inversement si une fonction  $f$  est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, elle est dite **impaire** (i.e. pour tout  $x \in D_f$ ,  $f(-x) = -f(x)$ ).

Chaque coefficient d'une fonction du second degré a un rôle dans le tracé de sa parabole.

À RETENIR ⚡

### Rôle des coefficients dans la représentation graphique

Soit  $f$  de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  réels). Alors on a :

- $a$  et  $b$  contrôlent l'**allure générale** de la courbe (son orientation, son inclinaison, ...).
- $c$  contrôle l'éloignement de la courbe par rapport à l'**axe des abscisses**.

À LIRE ☞

Rien que le signe de  $a$  peut changer toute l'allure de la courbe :

- Si  $a < 0$ , la fonction est croissante puis décroissante.
- Si  $a > 0$ , la fonction est décroissante puis croissante.

## II - Recherche de racines

### 1. Définition

À RETENIR

#### Définition

Soient  $f$  une fonction polynômiale du second degré et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On dit que  $x_0$  est **une racine** de  $f$  si  $f(x_0) = 0$ .

À LIRE

Autrement dit, résoudre l'équation  $f(x) = 0$  revient à rechercher les racines de  $f$ . Pour cela il existe beaucoup de méthodes et nous en détaillerons certaines par la suite.

### 2. Discriminant

À RETENIR

#### Définition

Soit  $f$  une fonction polynômiale du second degré de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  réels). On appelle **discriminant** de  $f$  le réel suivant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

À RETENIR

#### Propriétés

Plusieurs propriétés découlent du signe de  $\Delta$  :

- Si  $\Delta < 0$  alors  $f$  n'admet pas de racine réelle.
- Si  $\Delta = 0$  alors  $f$  admet une unique racine réelle :  $x_0 = \frac{-b}{2a}$ .
- Si  $\Delta > 0$  alors  $f$  admet deux racines réelles :  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

À LIRE

#### Exemple

Résolvons l'équation  $x^2 = 4$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

On a  $x^2 = 4 \iff x^2 - 4 = 0$ . Il s'agit en fait de chercher les racines de la fonction du second degré définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 4$ .

On identifie les coefficients :  $a = 1$ ,  $b = 0$  et  $c = -4$ ; puis on calcule le discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times 1 \times -4 = 16$ .

Comme  $\Delta > 0$ , on a deux racines réelles :  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -2$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$ .

Donc l'ensemble des solutions est  $S = \{-2; 2\}$ .

### 3. Racines évidentes

À RETENIR

#### Recherche des racines rationnelles

Soit  $f$  une fonction polynômiale du second degré de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  réels). On note  $D_c$  l'ensemble des diviseurs de  $c$  et  $D_a$  l'ensemble des diviseurs de  $a$ . Alors :

Pour trouver une éventuelle racine rationnelle de  $f$ , on calcule  $f\left(\frac{p}{q}\right)$  pour tout  $p \in D_c$  et  $q \in D_a$ , jusqu'à tomber sur 0.

À LIRE

#### Exemple

Utilisons cette méthode pour déterminer les éventuelles racines rationnelles de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 4x^2 - 1$ .

On a ici  $a = 4$ ,  $b = 0$  et  $c = -1$ ; la liste des diviseurs de  $c$  est :  $-1$  et  $1$ .

La liste des diviseurs de  $a$  est :  $4, 2, 1, -1, -2$  et  $-4$ . Il ne reste qu'à tester :

- $f\left(\frac{-1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{-4}\right) \neq 0$
- $f\left(\frac{-1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{-2}\right) = 0$  **Une racine!**
- $f\left(\frac{-1}{1}\right) = f(-1) \neq 0$
- $f\left(\frac{-1}{-1}\right) = f(1) \neq 0$
- $f\left(\frac{-1}{-2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$  **Une racine!**

On a deux racines rationnelles :  $-\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ .

Pas besoin d'aller plus loin car on a trouvé deux racines et un polynôme du second degré n'admet que deux racines maximum.

Signalons de plus que l'on aurait pu s'arrêter après avoir trouvé la première racine car  $f$  est une fonction paire.

### 4. Somme et produit de racines

À RETENIR

#### Relations

Soit  $f$  une fonction polynômiale du second degré de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  réels) admettant deux racines réelles  $x_1$  et  $x_2$ . Alors :

- La somme  $S = x_1 + x_2$  des racines vaut également  $-\frac{b}{a}$ .
- Le produit  $P = x_1 \times x_2$  des racines vaut également  $\frac{c}{a}$ .

À LIRE ☞

### Exemple

Il peut être très utile de combiner cette méthode avec celle des racines évidentes! Par exemple, cherchons les solutions de l'équation  $x^2 + 2x + 1 = 0$ .

Il faut donc chercher les racines de la fonction de degré 2 définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ .

On a  $a = 1$ ,  $b = 2$  et  $c = 1$ . Avec la méthode des racines évidentes, on trouve une racine  $x_1 = -1$ .

Or, on a  $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \iff x_2 = -1$ . La deuxième racine vaut aussi  $-1$ .

On dit que  $-1$  est **racine double**.

## 5. Forme factorisée

À RETENIR ⚡

### Définition

Soit  $f$  une fonction polynômiale du second degré de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  réels) admettant deux racines réelles  $x_1$  et  $x_2$ . Alors :

$f$  admet une **forme factorisée** qui vaut  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

À LIRE ☞

### Exemple

Chercher les racines de la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 6x + 9$ .

Avec une identité remarquable, on factorise  $f$  :  $f(x) = (x - 3)^2$ .

Cela correspond à la forme factorisée de  $f$  et elle nous permet d'en déduire que 3 est une racine double de  $f$ .

Une propriété découle immédiatement de cette méthode :

À RETENIR ⚡

### Propriété

Si  $c = 0$ , alors  $-\frac{b}{a}$  et 0 sont racines.

## III - Étude des fonctions polynômiales du second degré

### 1. Signe

À RETENIR

#### Signe d'une fonction du second degré

Soit  $f$  une fonction polynômiale du second degré de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  réels) admettant deux racines réelles  $x_1$  et  $x_2$ . On suppose ici que  $x_1 < x_2$ , alors :

- Si  $a < 0$  :  $f(x) < 0$  sur  $] -\infty; x_1[ \cup ]x_2; +\infty[$  et  $f(x) > 0$  sur  $]x_1; x_2[$ .
- Si  $a > 0$  :  $f(x) > 0$  sur  $] -\infty; x_1[ \cup ]x_2; +\infty[$  et  $f(x) < 0$  sur  $]x_1; x_2[$ .

À LIRE

Si  $x_1 = x_2$  ou si  $f$  n'admet pas de racine, alors  $f$  est du signe de  $a$ .

### 2. Variations

À RETENIR

#### Forme canonique

Soit  $f$  une fonction polynômiale du second degré de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  réels), alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on peut écrire  $f$  de la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Avec  $\alpha = -\frac{b}{2a}$  et  $\beta = f(\alpha)$ .

Cette forme est appelée **forme canonique** de  $f$  et elle possède de nombreuses propriétés intéressantes.

À RETENIR

#### Sommet de la parabole

Soit  $S$  le sommet de la parabole  $\mathcal{C}_f$ . Alors les coordonnées de  $S$  sont  $(\alpha, \beta)$ .

Si  $a < 0$ , ce sommet est un maximum et si  $a > 0$ , ce sommet est un minimum.

À LIRE

Cela veut tout simplement dire que :

- Si  $a < 0$ , le maximum de  $f$  est atteint en  $\alpha$  et vaut  $\beta$  (donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \leq \beta$ ).
- Si  $a > 0$ , le minimum de  $f$  est atteint en  $\alpha$  et vaut  $\beta$  (donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq \beta$ ).

Avec les remarques données précédemment, on peut en déduire les variations de la fonction  $f$ .

## À RETENIR

## Sens de variation

- Si  $a < 0$  :  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty; \alpha ]$  et est strictement décroissante sur  $] \alpha; +\infty ]$ .
- Si  $a > 0$  :  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; \alpha ]$  et est strictement croissante sur  $] \alpha; +\infty ]$ .

## 3. Axe de symétrie

## À RETENIR

## Axe de symétrie

Soit  $f$  une fonction polynômiale du second degré de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (avec  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  réels).  
On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative. Alors :

$\mathcal{C}_f$  possède un axe de symétrie : la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $x = -\frac{b}{2a}$ .

## À LIRE

En fait,  $\mathcal{D}$  est juste la droite verticale passant par le sommet de la parabole.