Chapitre VII – Probabilités

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Probabilités conditionnelles

1. Définition

À RETENIR

Définition

Soient A et B deux événements avec A de probabilité non nulle. Alors **la probabilité conditionnelle de** B **sachant que** A **est réalisé** (notée $P_A(B)$) est $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

À LIRE

Rappel

On rappelle que $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

À LIRE

Différence entre conditionnelle et intersection

Il faut faire attention, à bien faire la distinction entre une probabilité conditionnelle ("**Sachant qu'on a** A, quelle est la probabilité d'avoir B ?") et une intersection ("Quelle est la probabilité d'avoir A **et** B **à la fois** ?").

À RETENIR

Indépendance

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si la réalisation de l'un n'a aucune incidence sur la réalisation de l'autre et réciproquement. C'est-à-dire si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

À RETENIR

Propriétés

Pour deux événements indépendants A et B, on a les relations suivantes :

— $P_A(B) = P(B)$

— $P_B(A) = P(A)$

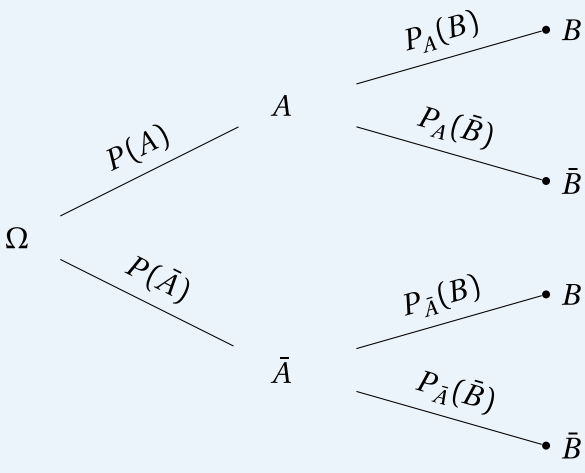
2. Arbre de probabilité

Au lycée, pour représenter visuellement des probabilités on utilise très souvent un **arbre de probabilité**.
Nous nous limiterons ici au cas de deux événements, mais il est possible d'en rajouter encore d'autres.
Ainsi :

À RETENIR

Définition

Soient A et B deux événements. L'arbre de probabilité décrivant la situation est le suivant :

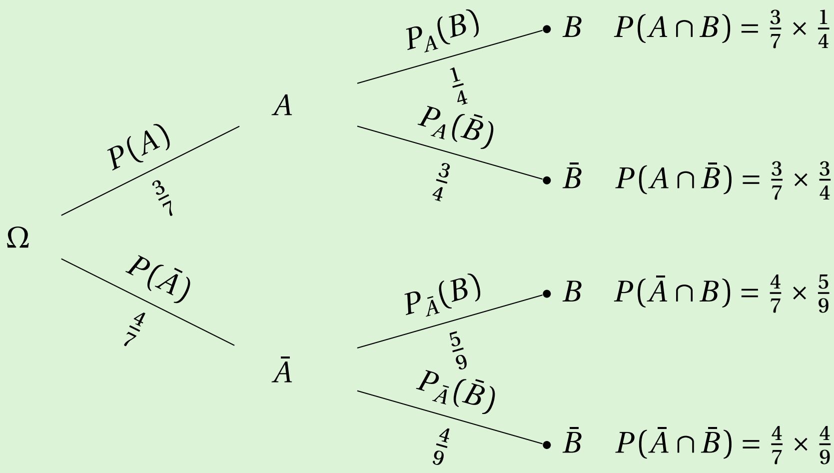


La somme (dans le sens vertical) des probabilités de chacune des branches ayant une "racine" commune doit toujours faire 1.

À LIRE

Exemple

Soit A et B deux événements non-indépendants tels que $P(A) = \frac{4}{7}$, $P_A(B) = \frac{1}{4}$ et $P_{\bar{A}}(B) = \frac{5}{9}$.
Alors l'arbre permettant de modéliser la situation est le suivant :



3. Formule des probabilités totales

Voici maintenant l'énoncé de la **formule des probabilités totales**, qui peut être très utile pour calculer des probabilités que l'on ne connaît pas (ou qui ne sont pas données dans un énoncé d'exercice) :

À RETENIR

Formule des probabilités totales

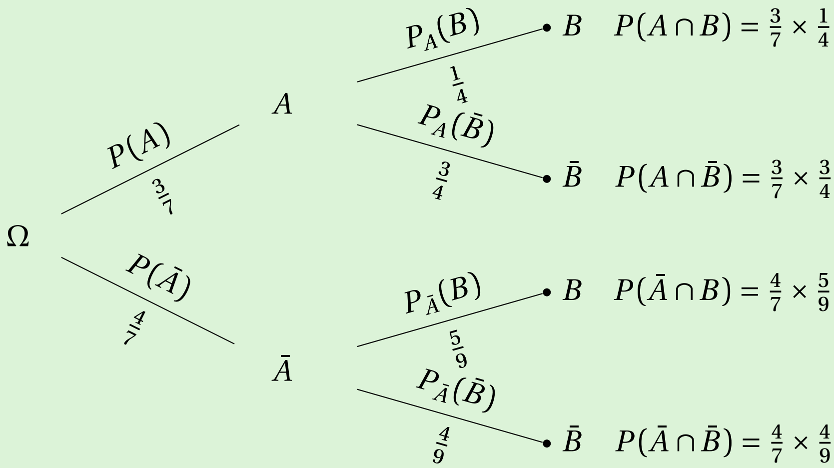
Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ des événements qui partitionnent (qui recouvrent) l'univers Ω, alors pour tout événement B :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

À LIRE

Exemple

En reprenant l'arbre précédent, comme A et $\bar{A}$ recouvrent notre univers (en effet, soit on tombe sur A, soit on tombe sur $\bar{A}$: pas d'autre issue possible), calculons $P(B)$:



D'après la formule des probabilités totales, $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = \frac{107}{252}$.

II - Variables aléatoires

1. Définition

À RETENIR

Définition

Une **variable aléatoire** X est une fonction qui, à chaque événement élémentaire de l'univers Ω y associe un nombre réel. C'est-à-dire : $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.

À LIRE

Les variables aléatoires sont très utiles notamment pour modéliser des situations de gains ou de pertes (à un jeu d'argent par exemple).

2. Loi de probabilité

À RETENIR

Définition

Soit X une variable aléatoire. La **loi de probabilité** de X attribue à chaque valeur x_i la probabilité $p_i = P(X = x_i)$ de l'événement $X = x_i$ constitué de tous les événements élémentaires dont l'image par X est x_i.

On représente généralement les lois de probabilité par un tableau.

À RETENIR

Représentation d'une loi de probabilité par un tableau

Soit X une variable aléatoire. On peut représenter sa loi de probabilité par le tableau ci-contre :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	$p_1 = P(X = x_1)$	$p_2 = P(X = x_2)$	...	$p_n = P(X = x_n)$

On a $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

À LIRE

Cette définition peut sembler un peu compliquée mais elle signifie juste qu'une loi de probabilité assigne une probabilité à chaque valeur prise par notre variable aléatoire.

3. Espérance, variance et écart-type

À RETENIR

Espérance

L'**espérance** $E(X)$ d'une variable aléatoire X est le réel :

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n$$

À RETENIR

Variance et écart-type

La **variance** $V(X)$ et l'**écart-type** $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire X sont les réels positifs suivants :

— $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
— $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

À LIRE

Exemple

Calcul de l'espérance, de la variance et de l'écart-type. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-1	0	2	6
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

On a :

— $E(X) = -1 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$
— $V(X) = ((-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 6^2 \times \frac{1}{8}) - (\frac{3}{4})^2 = \frac{75}{16}$
— $\sigma(X) = \sqrt{\frac{75}{16}} \approx 2.165$

Chacun de ces paramètres a une utilité bien précise. En effet :

À RETENIR

Signification des paramètres

— L'espérance est la **valeur moyenne** prise par X.
— La variance et l'écart-type mesurent la **dispersion** des valeurs prises par X. Plus ces valeurs sont grandes, plus les valeurs sont dispersées autour de l'espérance.