

# Chapitre III – Continuité, dérivabilité et convexité

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

## TABLE DES MATIÈRES

<b>I - Continuité</b>	<b>1</b>
1. Définition	1
2. Théorème des valeurs intermédiaires	1
3. La partie entière $[x]$	2
<b>II - Dérivation</b>	<b>4</b>
1. Nombre dérivé	4
2. Tangente en un point	4
3. Fonction dérivée	5
4. Applications	5
<b>III - Tables de dérivation</b>	<b>7</b>
1. Dérivées usuelles	7
2. Opérations sur les dérivées	7
3. Dérivées de composées	8
<b>IV - Convexité</b>	<b>10</b>
1. Dérivée seconde d'une fonction	10
2. Fonction convexe	10
3. Lien avec les tangentes	11

# I - Continuité

## 1. Définition

À RETENIR

### Définition

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et un réel  $a \in I$ . La fonction  $f$  est continue en  $a$  si on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

$f$  est dite **continue** sur  $I$ , si on peut appliquer la formule ci-dessus à tous les réels de l'intervalle  $I$ .

On dit de manière générale qu'une fonction est continue sur un intervalle s'il est possible de tracer sa courbe représentative sur cet intervalle "sans lever le crayon".

À RETENIR

### Opérations sur les fonctions continues

- Toute somme, produit, composée ou quotient (avec le dénominateur ne s'annulant pas) de fonctions continues est également continue sur le même intervalle.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle (la réciproque n'est pas vraie cependant).

À LIRE

### Exemple

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue en tout point de son ensemble de définition ( $\mathbb{R}^*$ ) mais n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ .

## 2. Théorème des valeurs intermédiaires

À RETENIR

### Théorème des valeurs intermédiaires

Si une fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $[a; b]$ , alors pour tout réel  $y_0$  tel que  $f(a) < y_0 < f(b)$  (ou  $f(a) > y_0 > f(b)$ ), il existe **au moins** un réel  $x_0 \in [a; b]$  tel que  $f(x_0) = y_0$ .

À LIRE

### Exemple

Ce théorème est **très important**! Voici un exemple : soit  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + x^2 - x$ . Prouvons qu'il existe au moins un réel  $x_0 \in [0; 3]$  tel que  $f(x_0) = 5$ . On a  $f(0) = 0$  et  $f(3) = 33$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme  $f$  est continue sur  $[0; 3]$  et que  $0 < 5 < 33$ , il existe un réel  $x_0 \in [0, 3]$  tel que  $f(x_0) = 5$ .

On peut encore tenter d'affiner la précision :  $f(1) = 1$  et  $f(2) = 10$ . On a bien  $1 < 5 < 10$  donc  $x_0 \in [1; 2]$ , etc.

À LIRE ☞

Une conséquence de ce théorème est que si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes opposés, alors la fonction  $f$  s'annule au moins une fois entre  $a$  et  $b$ .

Enfin, il existe un corollaire qui donne en plus **l'unicité** du point  $x_0$ .

À RETENIR ⚡

### Corollaire

Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$  et que  $f$  est **strictement monotone** sur cet intervalle, alors pour tout réel  $y_0$  tel que  $f(a) < y_0 < f(b)$  (ou  $f(a) > y_0 > f(b)$ ), il existe **un unique** réel  $x_0 \in [a; b]$  tel que  $f(x_0) = y_0$ .

## 3. La partie entière $\lfloor x \rfloor$

À RETENIR ⚡

### Définition

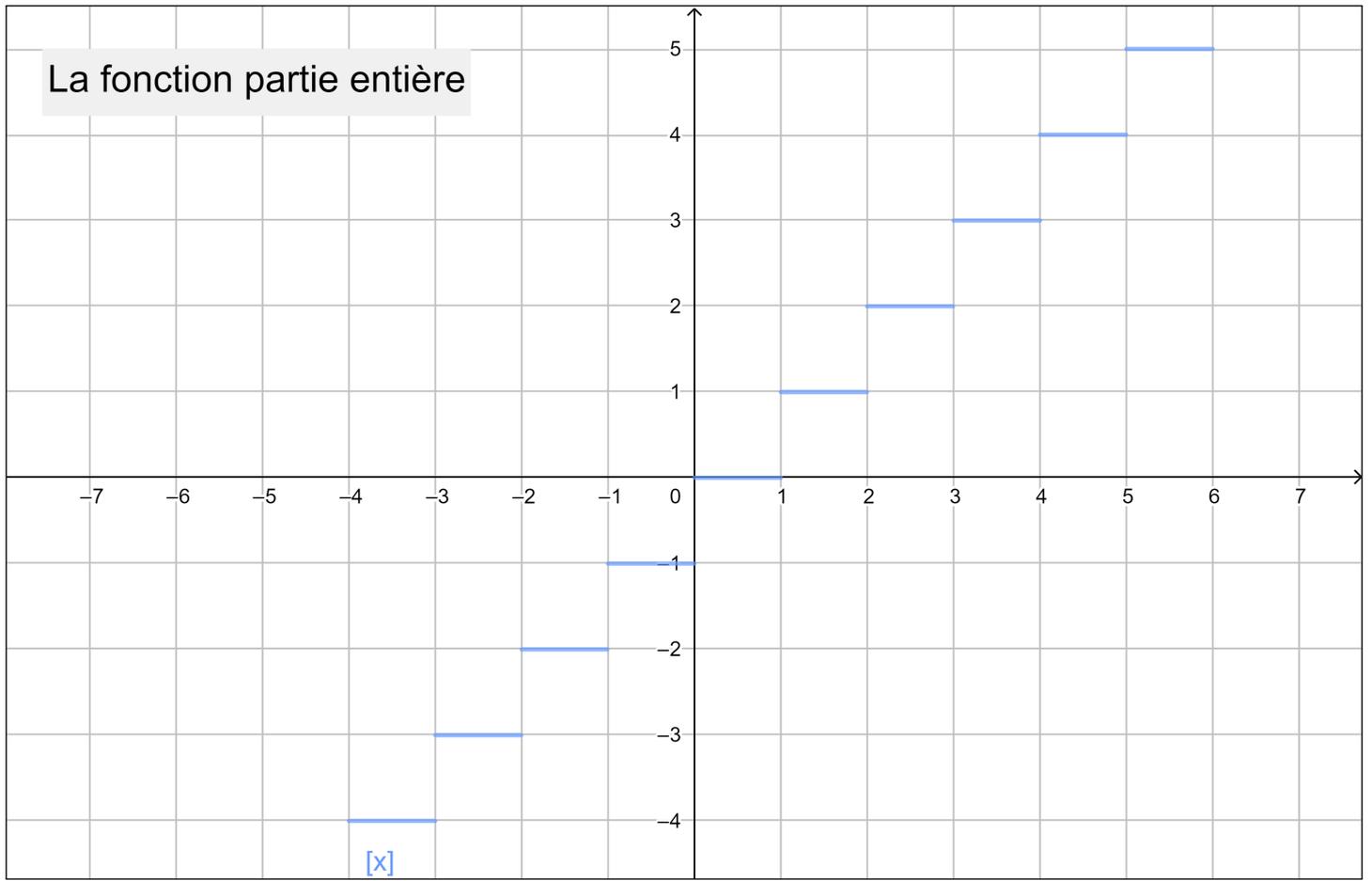
Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La **partie entière** de  $x$  notée  $\lfloor x \rfloor$  (ou  $E(x)$ ) est l'unique réel tel que :  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ .

À LIRE ☞

### Exemple

$\lfloor 1,216 \rfloor = 1$  et  $\lfloor -2,198 \rfloor = -3$ .

La fonction partie entière définie par  $x \mapsto \lfloor x \rfloor$  **n'est pas continue** sur  $\mathbb{R}$  :



## II - Dérivation

### 1. Nombre dérivé

À RETENIR

#### Définition

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et deux réels  $a \in I$  et  $h \neq 0$  tels que  $(a + h) \in I$ . La fonction  $f$  est **dérivable** en  $a$  si la limite ci-dessous existe et est finie :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ou en posant  $x = a + h$  :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si cette limite existe et est finie, alors elle est égale au **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ , noté  $f'(a)$ .

À LIRE

#### Remarque

Notez bien que toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

### 2. Tangente en un point

À RETENIR

#### Équation de la tangente

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et un réel  $a \in I$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors la courbe représentative de  $f$  admet une tangente  $\mathcal{T}$  au point de coordonnées  $(a; f(a))$ .

De plus,  $f'(a)$  est le coefficient directeur de  $\mathcal{T}$ , et une équation de  $\mathcal{T}$  est  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

À LIRE

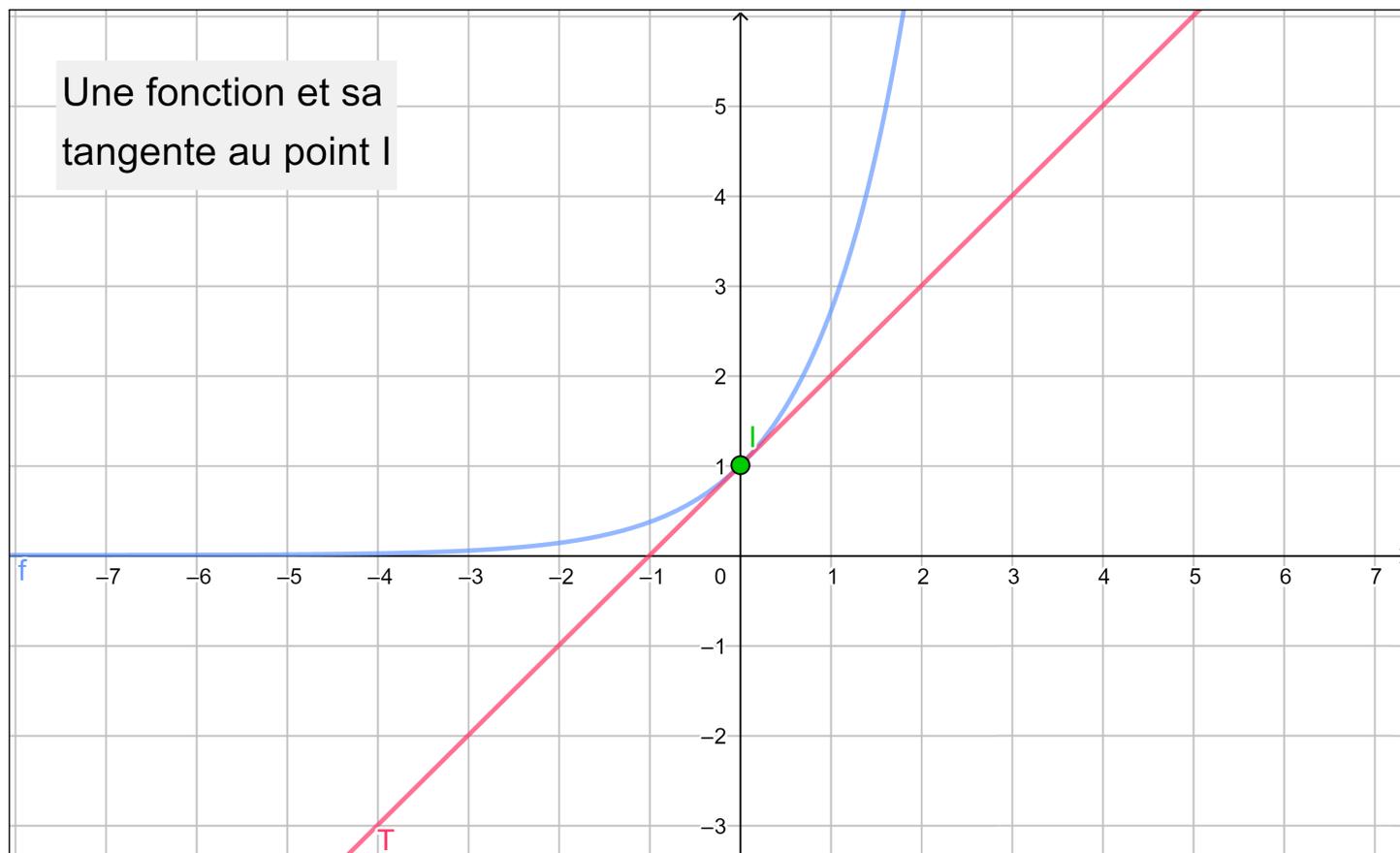
#### Exemple

Soit  $f(x) = e^x$  définie sur  $\mathbb{R}$  (voir cours sur la fonction exponentielle).

Cherchons une équation de la tangente au point d'abscisse  $x = 0$  :

On a  $f'(x) = f(x)$  donc  $f'(0) = 1$ .

Par conséquent, une équation de la tangente est  $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$  : on retrouve ce qui a été constaté sur la représentation graphique de la fonction exponentielle.



### 3. Fonction dérivée

À RETENIR

#### Définition

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

On appelle fonction dérivée (ou plus simplement **dérivée**) de  $f$  la fonction  $g$  qui à tout réel  $x$  de  $I$ , associe le nombre dérivé  $f'(x)$  (i.e.  $g(x) = f'(x)$ ).

Très souvent, la fonction  $g$  sera notée  $f'$ .

### 4. Applications

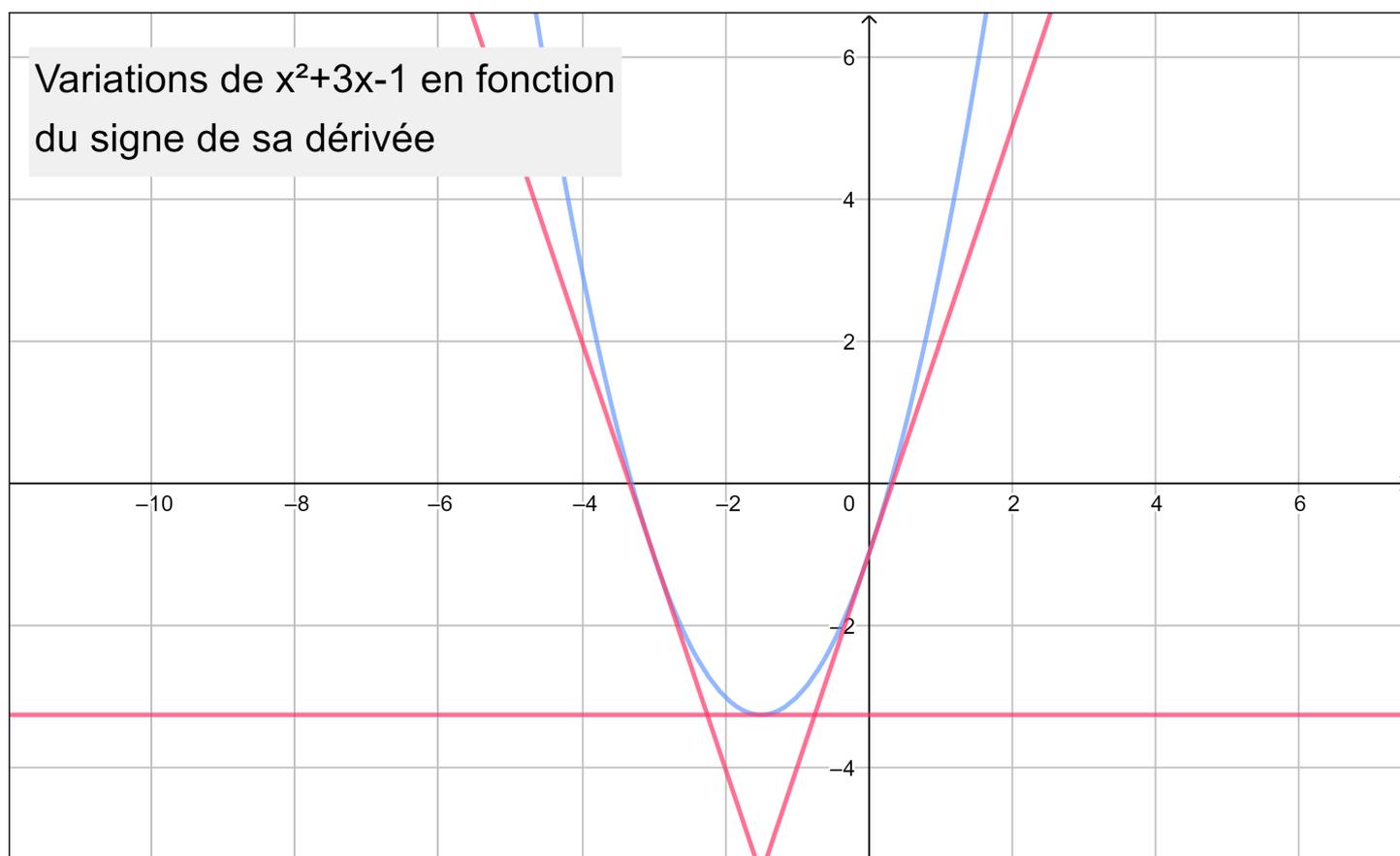
Plusieurs applications peuvent être trouvées aux dérivées. Avec le signe de la dérivée d'une fonction, il est possible d'obtenir le sens de variation de cette fonction.

À RETENIR

#### Variations d'une fonction

Soit une fonction  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f' > 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $f' < 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .
- Si  $f' = 0$  sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .



Il est également possible d'en déduire diverses propriétés sur les extrema dits "locaux" (sur un certain intervalle) d'une fonction.

À RETENIR

### Étude des extrema

Soient  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ , et  $a \in I$  :

- Si  $f$  admet un extremum local en  $a$ , alors on a  $f'(a) = 0$ .
- Si  $f'(a) = 0$  et que le signe de  $f'$  est différent avant et après  $a$ , alors  $f'(a)$  est un extremum local de  $f$ .
- Si  $f'(a) = 0$  et qu'on est négatif avant  $a$  et positif après, cet extremum local est un minimum local.
- Si  $f'(a) = 0$  et qu'on est positif avant  $a$  et négatif après, cet extremum local est un maximum local.

## III - Tables de dérivation

### 1. Dérivées usuelles

Le tableau suivant est à connaître et nous donne la dérivée de la plupart des fonctions usuelles :

#### À RETENIR

Soient  $\lambda$  une constante réelle et  $n$  un entier.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto \lambda$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_*^+$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_*^+$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$

### 2. Opérations sur les dérivées

Le tableau suivant est également à connaître et nous donne la dérivée qui dépend des opérations sur les fonctions  $u$  et  $v$  :

## À RETENIR

Soient deux fonctions  $u$  et  $v$  et soit  $\lambda$  une constante réelle.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$\lambda \times u$	$\lambda \times u'$	En tout point où $u$ est dérivable.
$u + v$	$u' + v'$	En tout point où $u$ et $v$ sont dérivables.
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	En tout point où $u$ et $v$ sont dérivables.
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	En tout point où $v$ est dérivable et non nulle.
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	En tout point où $u$ et $v$ sont dérivables et non nulles.

### 3. Dérivées de composées

Le tableau suivant, toujours à connaître, nous donne la dérivée des fonctions composées usuelles :

## À RETENIR

Soit  $u$  une fonction.

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
$u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$n u' u^{n-1}$	En tout point où $u$ est dérivable.
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	En tout point où $u$ est dérivable et non nulle.
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	En tout point où $u$ est dérivable et strictement positive.
$e^u$	$u' e^u$	En tout point où $u$ est dérivable.
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	En tout point où $u$ est dérivable et strictement positive.
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$	En tout point où $u$ est dérivable.
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$	En tout point où $u$ est dérivable.

Il est cependant possible de donner une formule plus générale.

## À RETENIR 🔦

## Dérivée d'une composée

Soient  $f$  dérivable sur  $I$  et  $g$  dérivable sur l'ensemble des valeurs prises par  $f$  sur  $I$ . On a alors  $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$ .

## À LIRE ☞

## Fonction composée

On rappelle que la fonction  $g \circ f$  est la fonction définie pour tout  $x$  par  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

# IV - Convexité

## 1. Dérivée seconde d'une fonction

À RETENIR

### Définition

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , de dérivée  $f'$  dérivable sur  $I$ .

On appelle **dérivée seconde** (notée  $f''$ ) de  $f$ , la fonction dérivée de  $f'$ .

Ainsi, pour calculer  $f''$ , on calcule d'abord  $f'$ , puis on dérive  $f'$ .

À LIRE

### Exemple

Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin(2x)$ . Calculons  $f''$ .

On applique la formule pour dérivée  $\sin(u)$  (où  $u$  est la fonction  $u : x \mapsto 2x$ ) :

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = u' \cos(u) = 2 \cos(2x)$ .

Pour finir, il suffit juste de dériver  $f'$  : pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f''(x) = 2 \times (-2 \sin(2x)) = -4 \sin(2x)$ .

## 2. Fonction convexe

À RETENIR

### Définition

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , de dérivée  $f'$  dérivable sur  $I$ .

- On dit que  $f$  est **convexe** sur  $I$  si  $f''$  est positive sur  $I$ .
- On dit que  $f$  est **concave** sur  $I$  si  $f''$  est négative sur  $I$ .
- On dit que  $a \in I$  est un **point d'inflexion** si  $f''$  change de signe en  $a$  (i.e.  $f''(a) = 0$  et  $f''$  est positive avant  $a$  puis négative après ou inversement).

À LIRE

Dire que  $f''$  est positive sur  $I$  revient à dire que  $f'$  est croissante sur  $I$ . De même, dire que  $f''$  est négative sur  $I$  revient à dire que  $f'$  est décroissante sur  $I$ .

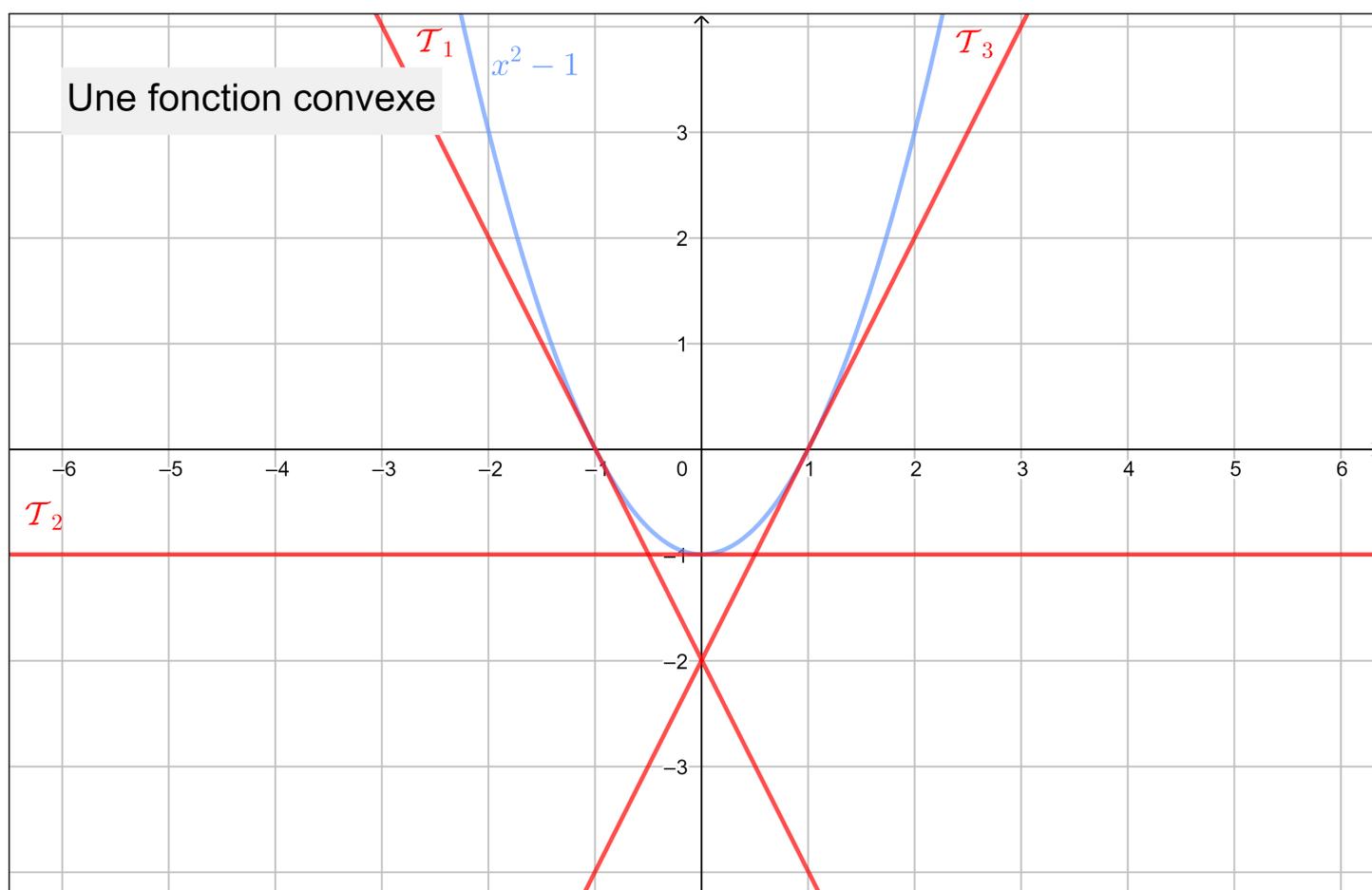
### 3. Lien avec les tangentes

À RETENIR

#### Lien avec la représentation graphique

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , de dérivée  $f'$  dérivable sur  $I$ . On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

- $f$  est **convexe** sur  $I$  si  $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de chacune de ses tangentes sur  $I$ .
- $f$  est **concave** sur  $I$  si  $\mathcal{C}_f$  est en dessous de chacune de ses tangentes sur  $I$ .



À LIRE

#### Exemple

À titre d'exemple, la fonction exponentielle est une fonction convexe.