Chapitre IX – Dénombrement

Bacomathiques — https://bacomathiqu.es

TABLE DES MATIÈRES

I - Définitions

1. Ensemble d'éléments

Cette partie donne quelques rappels sur la notion d'ensemble en mathématiques.

À RETENIR

Définition

Un **ensemble** E désigne une collection finie ou infinie d'objets distincts qu'on appelle ses **éléments**.

On note $x \in E$ si l'objet x appartient à E. Dans le cas contraire, on note $x \notin E$.

À noter que l'ordre des objets n'a aucune importance lorsque l'on compare deux ensembles.

À LIRE

Exemple

Voici quelques exemples d'ensembles :

- $\{2;4;6\}$ est un ensemble contenant 3 éléments.
- $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ sont deux ensembles contenant une infinité d'éléments.
- $\{\}$ est un ensemble ne contenant aucun élément : c'est **l'ensemble vide**, noté $\emptyset$.
- $\{1\}$ est un ensemble content 1 élément : c'est un **singleton**.

À LIRE

Il est possible de créer des ensembles contenant autre choses que des nombres. Par exemple, on définit les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3 + 1$. Alors l'ensemble $E = \{f;g\}$ est un ensemble contenant des fonctions.

À RETENIR

Réunion et intersection

Soient E et F deux ensembles.

- Leur **réunion** notée $E \cup F$ est l'ensemble constitué des éléments de E et des éléments de F.
- Leur **intersection** notée $E \cap F$ est l'ensemble constitué des éléments communs à E et F.
- Si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont **disjoints**.

2. Sous-ensemble

À RETENIR

Définition

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est un **sous-ensemble** (ou une partie) de E si tout élément de F est un élément de E.

On note ceci par $F \subset E$ (qui signifie "F est inclus dans E").

À LIRE

Exemple

Soient E et F deux ensembles. Alors $E \cap F \subset E$ et $E \cap F \subset F$.

3. Liste d'éléments

Nous allons désormais voir un type de collection similaire aux ensembles, mais qui prend en compte l'ordre des éléments.

À RETENIR

Définition

Un p-**uplet** (ou une p-liste) d'un ensemble E désigne une collection ordonnée de p éléments de E.

Remarquons que l'on ne demande pas que les éléments d'un p-uplet soient tous distincts.

À LIRE

Attention à l'ordre des éléments

Il faut bien faire attention à l'ordre des éléments ! Prenons par exemple deux points du plan $A = (1;2)$ et $B = (2;1)$.

On peut voir A et B comme des 2-uplets de $\mathbb{R}$. Or, ce sont deux points différents, d'où la nécessité de bien faire attention à ne pas mélanger $(1;2)$ et $(2;1)$.

À LIRE

Notation

Bien que l'on note un ensemble avec des accolades, on note plutôt un p-uplet avec des parenthèses. Ainsi :

— $\{1;2;3;4;5\}$ désigne l'ensemble constitué des nombres entiers de 1 à 5 (on a $\{1;2;3;4;5\} = \{2;1;3;4;5\} = \{5;4;3;2;1\} = \ldots$).

— $(1;2;3;4;5)$ désigne le 5-uplet constitué des nombres entiers de 1 à 5 (on a $(1;2;3;4;5) \neq (2;1;3;4;5) \neq (5;4;3;2;1) \neq \ldots$).

II - Combinaisons

1. Factorielle

À RETENIR

Définition

Soit n un nombre entier. On appelle factorielle de n le nombre entier suivant :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

À LIRE

Convention

Par convention, on pose $0! = 1$.

Il est très courant de rencontrer des calculs avec des factorielles en mathématiques, leur utilisation ne se limitant pas au dénombrement.

2. Définition

À RETENIR

Définition

Une **combinaison** de k éléments parmi n éléments, notée $\binom{n}{k}$, est le nombre de sous-ensembles de k éléments que possède un ensemble de n éléments.

À RETENIR

Calcul d'une combinaison

Soient n et k deux entiers. Alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

À LIRE

Exemple

Soit $E = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$. On cherche à connaître le nombre de sous-ensembles de 3 éléments que possède E. Pour cela, il suffit d'appliquer la formule :

$$\binom{30}{3} = \frac{30!}{27!3!} = \frac{28 \times 29 \times 30}{1 \times 2 \times 3} = 4060$$

E contient 4060 sous-ensembles de 3 éléments.

3. Formules

À RETENIR

Formules

Soient n et k deux entiers.

— $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
— $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
— $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

À LIRE

Triangle de Pascal

Une autre formule très utile est $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Elle peut se retrouver à l'aide du triangle de Pascal, que l'on construit comme tel :

1. Dans une pyramide, on place un 1 au sommet de la pyramide.
2. On place 1 et 1 en dessous, de part et d'autre.
3. Les extrémités des lignes sont toujours des 1, et les autres nombres sont la somme des deux nombres directement au-dessus.

Les premières lignes du triangle de Pascal sont donc :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Ainsi, le k-ième coefficient de la n-ième ligne est égal à $\binom{n}{k}$ (en partant de 0).

III - Dénombrement

1. Principe additif

À RETENIR

Principe additif

Soient E et F deux ensembles disjoints contenant respectivement n et m éléments. Alors $E \cup F$ contient $n+m$ éléments.

À LIRE

Exemple

Si on pose $E = \{1;3;5\}$ et $F = \{2;4;6;8\}$. E et F sont alors bien disjoints, donc $E \cup F$ contient $3+4=7$ éléments.

2. Principe multiplicatif

Commençons cette sous-section par une définition.

À RETENIR

Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Leur produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples $(e;f)$ où $e \in E$ et $f \in F$.

À LIRE

Exemple

Cette définition peut sembler un peu compliquée, mais elle est en faite très intuitive. Prenons $E = \{1;2;3\}$ et $F = \{4;5\}$.

Alors on a $E \times F = \{(1;4);(1;5);(2;4);(2;5);(3;4);(3;5)\}$.

À LIRE

Construction du plan cartésien

Prenons maintenant $E = F = \mathbb{R}$. Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x;y)$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Il s'agit en fait du plan cartésien.

À RETENIR

Principe multiplicatif

Soient E et F deux ensembles contenant respectivement n et m éléments. Alors $E \times F$ contient $n \times m$ éléments.

Ce principe (tout comme le principe additif vu précédemment) sont notamment utilisés en probabilités.

3. Formules de dénombrement

À RETENIR

Permutations

Soit E un ensemble de taille n. On appelle **permutation** de E tout n-uplet d'éléments distincts de E.

À LIRE

Exemple

Prenons $E = \{1;2;3\}$. Alors E admet 6 permutations qui sont :

— $(1;2;3)$
— $(1;3;2)$
— $(2;1;3)$
— $(2;3;1)$
— $(3;1;2)$
— $(3;2;1)$

À RETENIR

Formules

Soit E un ensemble possédant n éléments.

— Le nombre de p-uplets d'éléments de E est égal à n^p.
— Le nombre de p-uplets d'éléments distincts de E est égal à $\frac{n!}{(n-p)!}$.
— Le nombre de permutations de E est égal à $n!$.
— Le nombre de sous-ensembles de E est égal à 2^n.
— Le nombre de sous-ensembles de k éléments que possède E est égal à $\binom{n}{k}$ (pour rappel).

À noter également une dernière petite formule qu'il peut être utile de savoir démontrer à l'aide des formules ci-dessus.

À RETENIR

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

DÉMONSTRATION

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit E un ensemble à n éléments.

Par la dernière formule de dénombrement, E a $\binom{n}{0}$ sous-ensembles qui possèdent 0 éléments, $\binom{n}{1}$ sous-ensembles qui possèdent 1 éléments, ...

En fait, pour tout k compris entre 0 et n, E a exactement $\binom{n}{k}$ sous-ensembles qui possèdent k éléments (toujours d'après la dernière formule).

Donc finalement, on obtient bien que la somme des $\binom{n}{k}$ vaut 2^n (qui est, d'après l'avant-dernière formule, le nombre de sous-ensembles que possède E).