

Chapitre XIII – Les nombres complexes (Maths expertes)

Bacomathiques — <https://bacomathiqu.es>

TABLE DES MATIÈRES

I - L'ensemble des nombres complexes \mathbb{C}	1
1. L'ensemble \mathbb{C}	1
2. Forme algébrique d'un nombre complexe	2
3. Égalité entre nombres complexes	2
4. Conjugué	2
5. Module	3
II - Polynômes dans \mathbb{C}	5
1. Généralités sur les polynômes	5
2. Résolution d'une équation du second degré	6
3. Factorisation par $z - a$	7
III - Géométrie avec les nombres complexes	9
1. Formes trigonométrique et exponentielle	9
2. Propriétés de l'argument	10
3. Affixe et représentation	11
4. Lien Géométrie - Nombres complexes	13
5. L'ensemble \mathbb{U} et les racines n -ièmes de l'unité	14

I - L'ensemble des nombres complexes \mathbb{C}

1. L'ensemble \mathbb{C}

À RETENIR

L'ensemble \mathbb{C}

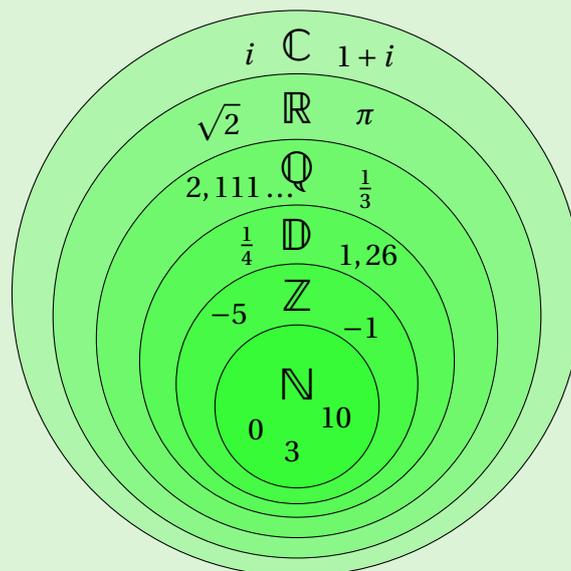
Il existe un ensemble de nombres noté \mathbb{C} qui contient l'ensemble \mathbb{R} ainsi qu'un nombre $i \in \mathbb{C}$ vérifiant $i^2 = -1$.

Cet ensemble est appelé **ensemble des nombres complexes** et obéit aux “mêmes” règles de calcul que l'ensemble \mathbb{R} .

À LIRE

Schéma

Il peut être dur de se représenter l'ensemble des nombres complexes, voici un schéma représentant les ensembles de nombres déjà connus :



Comme on peut le voir ici, l'ensemble \mathbb{C} contient l'ensemble \mathbb{R} mais également des nombres qui ne sont pas réels (i , $1+i$, etc.).

2. Forme algébrique d'un nombre complexe

À RETENIR 🔔

Forme algébrique

Tout **nombre complexe** z peut s'écrire $z = x + iy$ où x et y sont deux réels. Cette écriture est appelée **forme algébrique** de z . On dit que :

- x est la **partie réelle** de z (notée $\text{Re}(z)$).
- y est la **partie imaginaire** de z (notée $\text{Im}(z)$).

À LIRE ☞

Le nombre z est dit **réel** si $y = 0$ et il est dit **imaginaire pur** si $x = 0$.

3. Égalité entre nombres complexes

À RETENIR 🔔

Lien entre égalité et parties réelle et imaginaire

Deux nombres complexes z et z' sont **égaux** si et seulement si $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$.

Ainsi, pour que deux nombres complexes soient égaux, leur partie réelle et leur partie imaginaire doivent toutes deux être égales.

À LIRE ☞

Attention!

Il n'y a pas de relation d'ordre dans l'ensemble \mathbb{C} . On ne pourra donc pas avoir de relation du type " $z \leq z'$ ".

4. Conjugué

À RETENIR 🔔

Définition

Tout nombre complexe $z = x + iy$ admet un nombre complexe **conjugué** noté \bar{z} . Ce conjugué est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.

On donne également quelques formules permettant de calculer plus facilement des conjugués de nombres complexes.

À RETENIR

Relations

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ où $z' \neq 0$
- $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ où $n \in \mathbb{N}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

Enfin, on a plusieurs propriétés intéressantes que l'on peut dégager.

À RETENIR

Propriétés

Soit z un nombre complexe.

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$
- z est un réel si et seulement si $z = \bar{z}$
- z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$

5. Module

À RETENIR

Définition

On appelle **module** d'un nombre complexe $z = x + iy$ (noté $|z|$) le réel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Le module possède des propriétés intéressantes (à la manière de la valeur absolue pour les réels).

À RETENIR

Formules

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|\alpha z| = \sqrt{\alpha^2} |z|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (en particulier, $|-z| = |z|$)
- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|z| = |\bar{z}|$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ où $z' \neq 0$
- $|z^n| = |z|^n$ où $n \in \mathbb{N}$

À LIRE ☞

Retrouver les formules

Ces propriétés peuvent sembler compliquées mais heureusement il est possible de les retrouver par le calcul. Par exemple, pour la quatrième propriété, en posant $z = x + iy$ (et donc $\bar{z} = x - iy$) :

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

II - Polynômes dans \mathbb{C}

1. Généralités sur les polynômes

À RETENIR

Définition

Soit n un entier. On dit que P est un **polynôme de degré n** si P est une expression formelle de la forme :
 $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$.

En classe de Terminale, on peut remplacer “expression formelle” par “fonction” (un polynôme de degré n sera donc la même chose qu’une **fonction polynômiale de degré n**). Dans ce chapitre, ce seront des fonctions à valeurs complexes.

À LIRE

Il peut être intéressant pour vous de faire le lien avec les fonctions polynômiales du second degré vues en Première.

À RETENIR

Racine d’un polynôme

On dit qu’un nombre complexe a est une racine d’un polynôme P si on a $P(a) = 0$.

On donne enfin la **formule du binôme de Newton**, qui peut s’avérer utile pour développer certaines expressions.

À RETENIR

Formule du binôme de Newton

Soient a et b deux nombres complexes. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

DÉMONSTRATION

Formule du binôme de Newton

Nous allons prouver cette propriété en utilisant le dénombrement, mais il est tout à fait possible de le faire par récurrence (c'est d'ailleurs un très bon exercice!)

Ainsi, on a $(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \times (a + b) \times \cdots \times (a + b)}_{n \text{ fois}}$.

En développant cette expression on peut obtenir une somme de termes de la forme $a^k b^j$ où :

- k représente le nombre de fois où l'on a choisi a en développant.
- j représente le nombre de fois où l'on a choisi b en développant.

Ainsi, forcément, $i = n - k$ (car si on ne choisit pas a , alors on choisit b ; choisir k fois a revient donc à choisir $n - k$ fois b).

De plus, il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir k fois a parmi les n expressions $(a + b)$, alors l'expression $a^k b^{n-k}$ apparaît $\binom{n}{k}$ lors du développement. Notre somme de termes devient donc :

$$(a + b)^n = \underbrace{(a^0 b^{n-0} + \cdots + a^0 b^{n-0})}_{\binom{n}{0} \text{ termes}} + \cdots + \underbrace{(a^k b^{n-k} + \cdots + a^k b^{n-k})}_{\binom{n}{k} \text{ termes}} + \cdots + \underbrace{(a^n b^{n-n} + \cdots + a^n b^{n-n})}_{\binom{n}{n} \text{ termes}}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

À LIRE

Si $n = 2$, on retrouve $(a + b)^2 = \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

On admet de plus une propriété fondamentale de \mathbb{C} .

À RETENIR

Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme non-nul de degré n admet au plus n racines complexes.

2. Résolution d'une équation du second degré

Il est possible d'étendre la résolution d'une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$ dans le cas où le polynôme admet un discriminant est négatif. Nous allons voir ici une méthode de résolution.

À RETENIR

Résolution d'une équation du second degré

On considère l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$ (où a, b et c sont trois réels et $a \neq 0$). On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, et alors les solutions de (E) dépendent du signe de Δ :

- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, (E) admet une solution réelle $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \bar{z}_1$.

À LIRE ☞

Exemple

On souhaite résoudre l'équation $-2z^2 + 4z = 10$ dans \mathbb{C} .

1^{re} étape : On fait apparaître une équation du second degré : $-2z^2 + 4z - 10 = 0$.

2^e étape : On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 80 = -64$.

3^e étape : On "transforme" le discriminant négatif : $\Delta = 64i^2 = (8i)^2$.

4^e étape : On trouve les solutions :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{-4 - 8i}{2 \times -2} = 1 + 2i \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}i}{2a} = \frac{-4 + 8i}{2 \times -2} = 1 - 2i = \bar{z}_1$$

À LIRE ☞

Relation avec les racines d'un polynôme

Résoudre une équation du type $az^2 + bz + c = 0$ (où a , b et c sont trois réels et $a \neq 0$) revient à chercher les racines complexes du polynôme P défini pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $P(z) = az^2 + bz + c$.

3. Factorisation par $z - a$

À RETENIR 🔔

Factorisation par une racine

Soit P un polynôme de degré n et soit a une racine de ce polynôme. Alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - a)Q(z)$.

À LIRE ☞

Exemple

Factorisons le polynôme P défini pour tout $z \in \mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$.

On remarque déjà que $P(1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$. Donc 1 est racine de P , il existe donc un polynôme Q de degré 2 tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - 1)Q(z)$.

Essayons maintenant de déterminer Q . Posons $Q(z) = az^2 + bz + c$ et déterminons les coefficients a , b et c .

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - 1)Q(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$.

Il suffit maintenant d'identifier les coefficients (dans la première expression de P) :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 \\ c - b = 1 \\ -c = -1 \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Finalement, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = z^2 + 1$, donc $P(z) = (z - 1)(z^2 + 1)$.

Pour terminer la factorisation, il faut également factoriser Q . Pour cela on calcule son discriminant qui est donc $\Delta = -4$: on a deux racines complexes conjuguées qui sont $z_1 = -i$ et $z_2 = i$.

Finalement, comme Q est de degré 2 (et qu'on a trouvé deux racines), la factorisation est terminée : on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q(z) = (z - i)(z + i)$ donc $P(z) = (z - 1)(z - i)(z + i)$.

Une application possible de cette propriété est que tout polynôme P de la forme $P(z) = z^n - a^n$ se factorise en $P(z) = (z - a)Q(z)$ (où Q est un polynôme de degré $n - 1$) car a est une racine de P et que P est un polynôme de degré n .

III - Géométrie avec les nombres complexes

1. Formes trigonométrique et exponentielle

Tout nombre complexe peut s'écrire sous trois formes la **forme algébrique**, la **forme trigonométrique** et la **forme exponentielle**.

À RETENIR

Forme trigonométrique

Pour obtenir la forme trigonométrique d'un nombre complexe $z = x + iy$, il faut tout d'abord obtenir son module. La **forme trigonométrique** de z est ensuite donnée par : $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

Avec θ l'**argument** de z (noté $\arg(z)$) qui doit vérifier :

$$\begin{aligned} - \cos(\theta) &= \frac{x}{|z|} \\ - \sin(\theta) &= \frac{y}{|z|} \end{aligned}$$

Une fois la forme trigonométrique obtenue, on peut passer à la forme exponentielle.

À RETENIR

Forme exponentielle / Formule d'Euler

Soit z un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$. Alors $z = |z|e^{i\theta}$.

À LIRE

Exemple

On veut passer le nombre complexe $z = 1 + i$ sous forme exponentielle.

1^{re} étape : On calcule le module : $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

2^e étape : On factorise par le module : $z = \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2})$.

3^e étape : On calcule l'argument : $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ (car $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

4^e étape : On passe à la forme exponentielle : $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

On peut étendre l'égalité entre nombres complexes donnée au début : deux nombres complexes sont égaux s'ils ont le **même module** et le **même argument (modulo 2π , nous détaillerons ce point-ci plus tard)**.

À LIRE ☞

Formules de Première

Il est possible de retrouver les formules trigonométriques vues en Première à l'aide des nombres complexes. La démonstration suivante n'est pas à apprendre mais peut être utile pour retrouver ces formules.

On a $e^{i \times (a+b)} = e^{i \times a} \times e^{i \times b}$.

En passant à la forme trigonométrique, cela donne : $\cos(a + b) + i \sin(a + b) = (\cos(a) + i \sin(a)) \times (\cos(b) + i \sin(b))$.

Puis en développant : $\cos(a + b) + i \sin(a + b) = \cos(a) \cos(b) + i \cos(a) \sin(b) + i \cos(b) \sin(a) - \sin(a) \sin(b)$.

Il reste à travailler un petit peu l'expression : $\cos(a + b) + i \sin(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) + i(\cos(a) \sin(b) + \cos(b) \sin(a))$.

Or deux nombres complexes sont égaux si et seulement si la partie réelle et la partie imaginaire de ces deux nombres sont égales, cela donne :

$$\begin{cases} \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \sin(a + b) = \cos(a) \sin(b) + \cos(b) \sin(a) \end{cases}$$

Les formules vues en Première ont donc bien été retrouvées.

2. Propriétés de l'argument

À RETENIR ⚡

Propriétés

Soit z un nombre complexe.

- z est un réel si et seulement si $\arg(z) = k \times \pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = k \times \frac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$

Pour conclure cette partie, nous allons donner quelques formules permettant de calculer des arguments.

À RETENIR ⚡

Formules

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg(-z) = -\arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$
- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z) \pmod{2\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

À LIRE ☞

Le “ $\text{mod } 2\pi$ ” signifie simplement que l’on se place **modulo** 2π . Dans cette configuration, on a $-\pi = \pi \text{ mod } 2\pi$, mais aussi $-\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \text{ mod } 2\pi$, ou encore $\pi = 3\pi \text{ mod } 2\pi$.

3. Affixe et représentation

Dans tout ce qui suit, le plan sera muni d’un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

À RETENIR !

Affixe d’un point

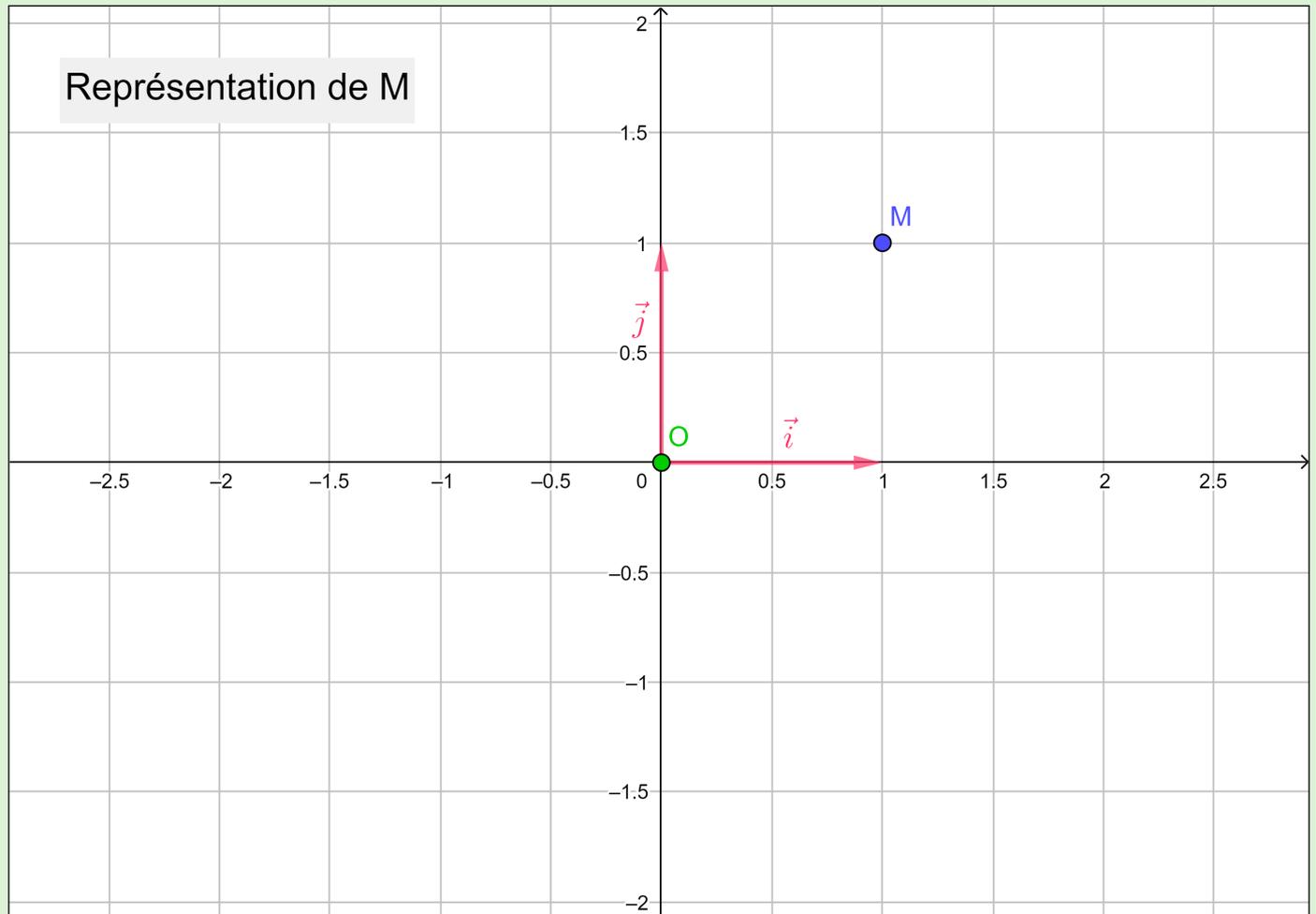
Un nombre complexe $z = x + iy$ peut être représenté dans le plan par un point M de coordonnées $(x; y)$. z est alors appelé **affixe** du point M (et réciproquement le point M est **l’image** de z).

Un nombre complexe $z' = |z'|e^{\theta}$ peut être représenté dans le plan par un point M' situé sur le cercle d’origine O et de rayon $|z'|$. Le point M' est alors situé à l’angle de θ radians sur ce cercle. Le module est donc une **distance** et l’argument est un **angle**.

À LIRE ☞

Exemple

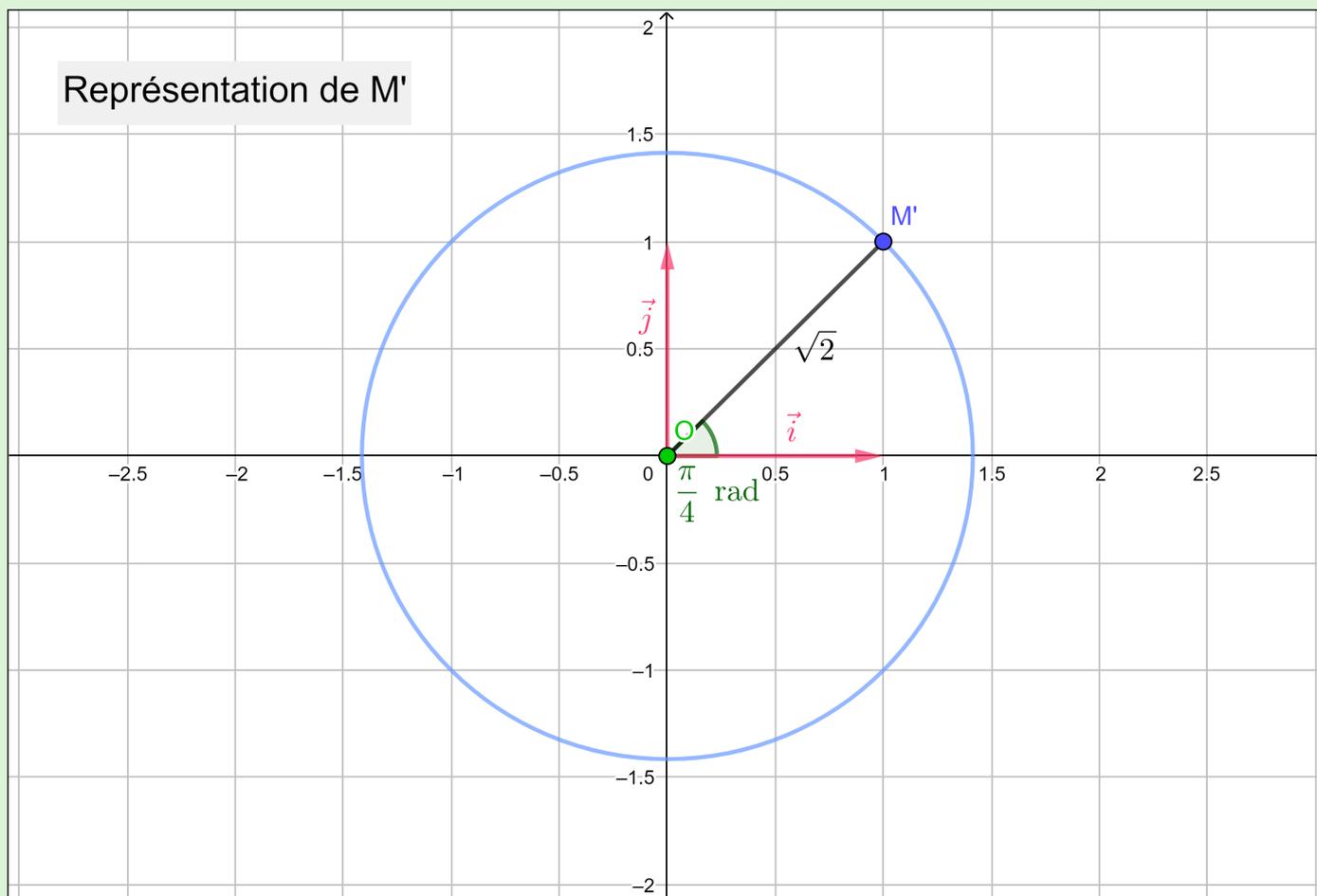
On souhaite représenter le point M d'affixe $z = 1 + i$ dans le plan. On a les coordonnées de M qui sont $x = 1$ et $y = 1$:



À LIRE 99

Exemple

On souhaite représenter le point M' d'affixe $z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ dans le plan. On a le module de z' : $|z'| = \sqrt{2}$, et un argument de z' : $\theta = \frac{\pi}{4}$. On va donc tracer le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ ainsi qu'un segment passant par O et intersectant le cercle en faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ radians avec l'axe des abscisses. Leur intersection sera le point M' :



On voit à l'aide de ces deux représentations que $z = z'$ (où z est le nombre complexe de l'exemple précédent), comme cela a été démontré dans l'exemple de la première partie.

4. Lien Géométrie - Nombres complexes

Une propriété remarquable des nombres complexes est qu'il est possible de les utiliser pour faire de la géométrie! Cela peut sembler surprenant, mais cela repose sur le fait que tout nombre complexe z s'écrit $x + iy$ (avec x la partie réelle de z et y sa partie imaginaire), et que, comme dit dans la partie précédente, on peut y associer le point de coordonnées $(x; y)$.

Voici, de manière plus formelle, quelques propriétés de géométrie reposant sur l'utilisation des nombres complexes. On rappelle que l'on se place dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

À RETENIR

Affixe d'un vecteur

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B . Alors on associe au vecteur \overrightarrow{AB} son **affixe** qui est le complexe $z_B - z_A$.

À LIRE

Lien avec l'affixe d'un point

En fait, pour faire le lien avec la partie précédente, l'affixe d'un point A est tout simplement l'affixe du vecteur \overrightarrow{OA} .

À RETENIR

Propriétés

Soient A, B, C et D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D .

- **La longueur AB est :** le module du complexe $z_B - z_A$ (i.e. $|z_B - z_A|$). Il s'agit également de la norme du vecteur \overrightarrow{AB} .
- **Le milieu du segment $[AB]$ est :** le point M d'affixe $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- **L'angle $(i; \overrightarrow{AB})$ est :** l'argument du complexe $z_B - z_A$ (i.e. $\arg(z_B - z_A)$, modulo 2π).
- **L'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$ est :** l'argument du complexe $\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)$ (i.e. $\arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)$, modulo 2π).

5. L'ensemble \mathbb{U} et les racines n -ièmes de l'unité

À RETENIR

L'ensemble \mathbb{U}

On note par \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1.

À RETENIR

Stabilité de \mathbb{U}

Soient $z, z' \in \mathbb{U}$. Alors $z \times z' \in \mathbb{U}$ et $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

En fait, l'ensemble \mathbb{U} permet de décrire tous les points du cercle trigonométrique. Passons maintenant à l'étude de certains sous-ensembles de \mathbb{U} .

À RETENIR

Racines n -ièmes de l'unité

Soit z un nombre complexe. On dit que z est une **racine n -ième de l'unité** si $z^n = 1$.

De plus, en notant par \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité, on a

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2i\pi \times 0}{n}}, e^{\frac{2i\pi \times 1}{n}}, e^{\frac{2i\pi \times 2}{n}}, \dots, e^{\frac{2i\pi \times (n-1)}{n}} \right\}.$$

DÉMONSTRATION

Racines n -ièmes de l'unité

Soit $z \in \mathbb{U}_n$. On a $z^n = 1$, donc $|z^n| = |z|^n = 1$. Ainsi, on a $|z| = 1$. En écrivant z sous forme exponentielle, il existe $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$.

Ainsi, $z^n = 1 \iff e^{in\theta} = 1 = e^{i0}$. Or, deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont le même module et le même argument. On doit donc avoir $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 0 + 2k\pi$ i.e. $\theta = \frac{2k\pi}{n}$.

Et comme par le théorème fondamental de l'algèbre, l'équation $z^n - 1 = 0$ admet au plus n solutions, on a donc trouvé toutes les solutions.

À LIRE

L'ensemble \mathbb{U}_n décrit exactement le polynôme régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique ayant pour sommet 1.

Par exemple, \mathbb{U}_3 est l'ensemble des sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique (dont un sommet est 1).